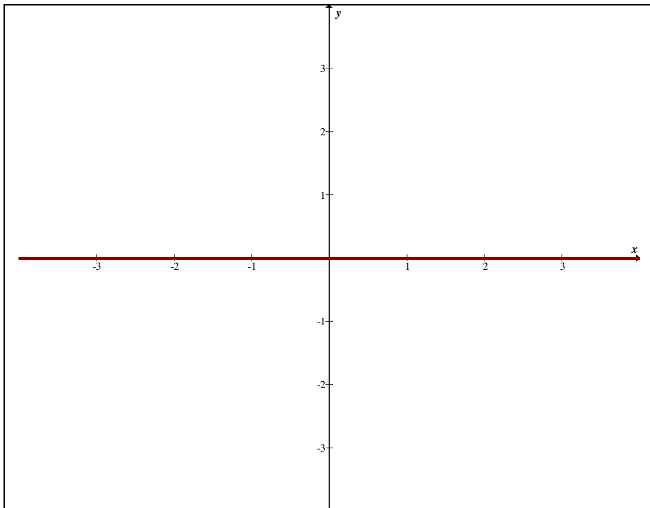
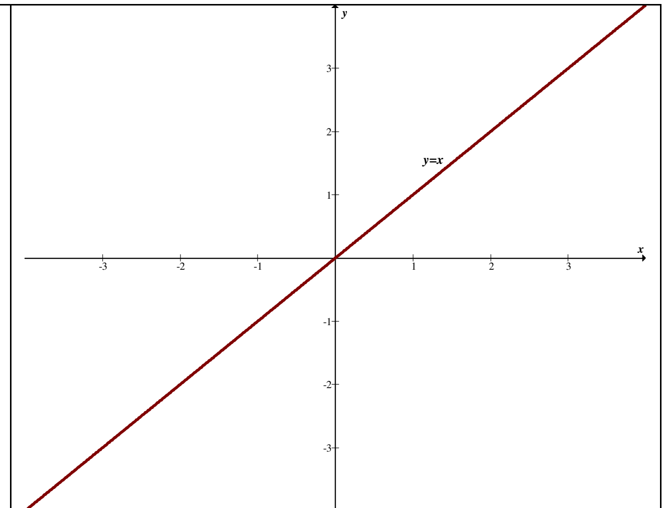
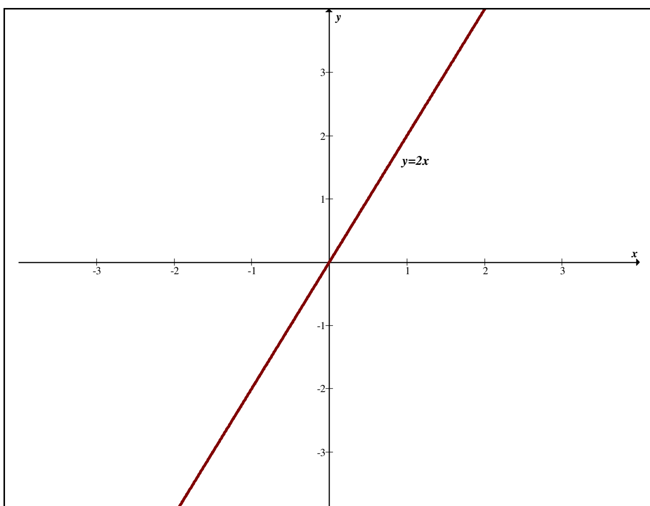
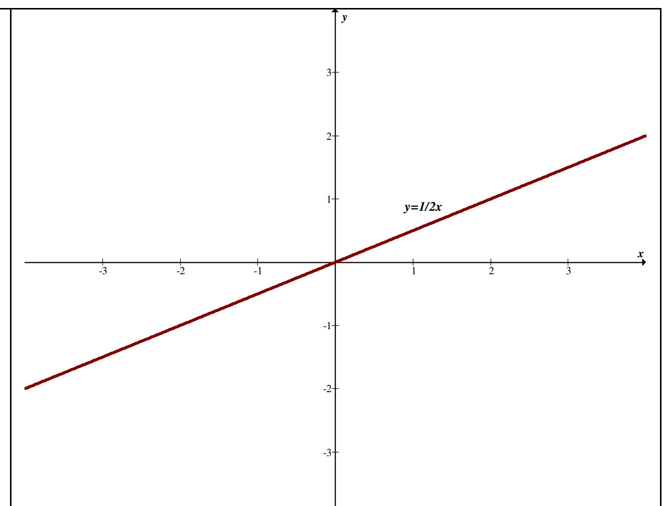
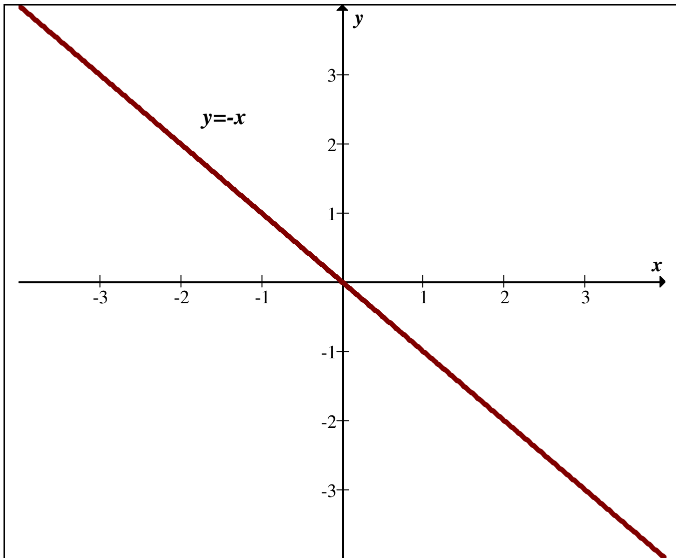
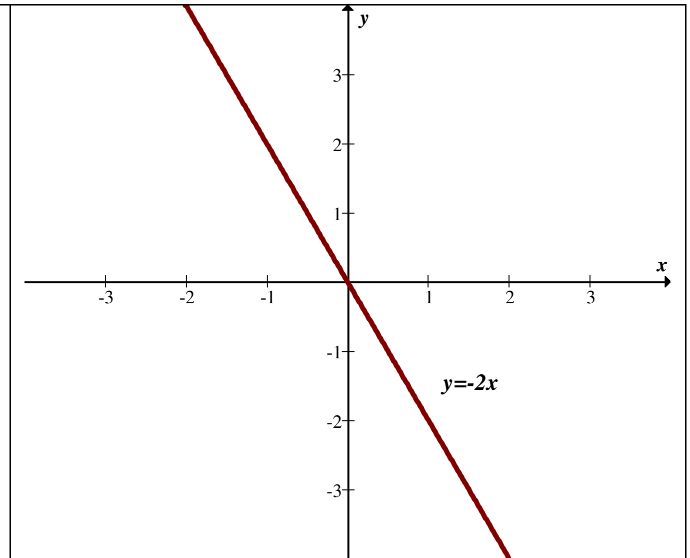
2.17 – EXERCÍCIO – pg. 53

1. Construir os gráficos das funções lineares. Dar o domínio e o conjunto imagem.

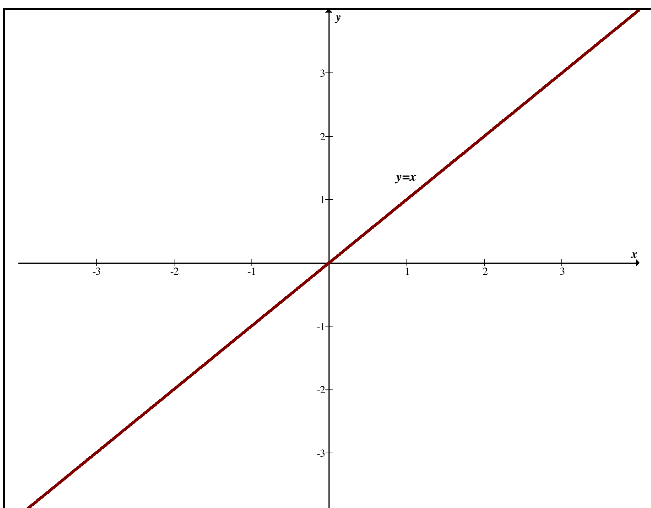
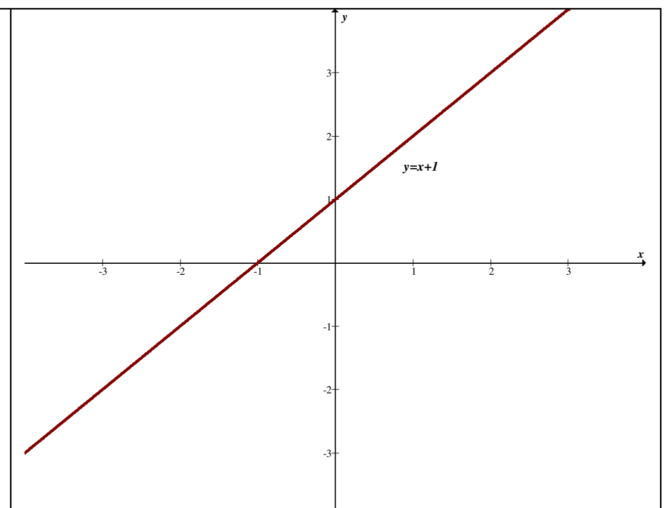
a) $y = kx$, se $k = 0, 1, 2, 1/2, -2$.

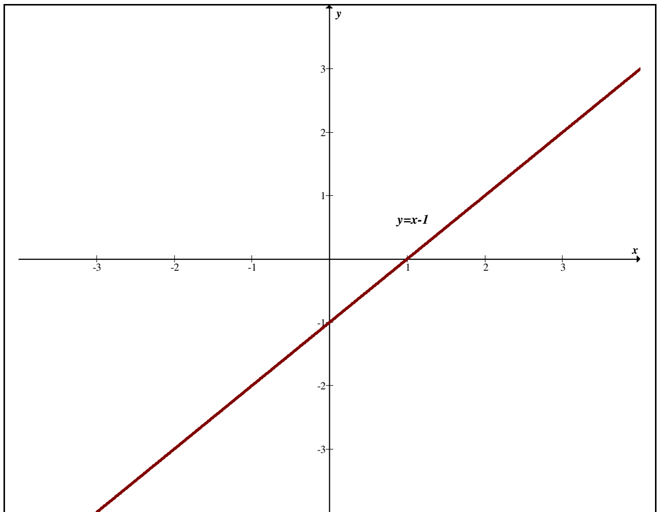
	
k=0 $D(f) = IR$ $\text{Im}(f) = \{0\}$	k=1 $D(f) = IR$ $\text{Im}(f) = IR$

	
k=2 $D(f) = IR$ $\text{Im}(f) = IR$	k=1/2 $D(f) = IR$ $\text{Im}(f) = IR$

	
k=-1 $D(f) = IR$ $\operatorname{Im}(f) = IR$	k=-2 $D(f) = IR$ $\operatorname{Im}(f) = IR$

b) $y = x + b$, se $b = 0, 1, -1$.

	
b=0 $D(f) = IR$ $\operatorname{Im}(f) = IR$	b=1 $D(f) = IR$ $\operatorname{Im}(f) = IR$

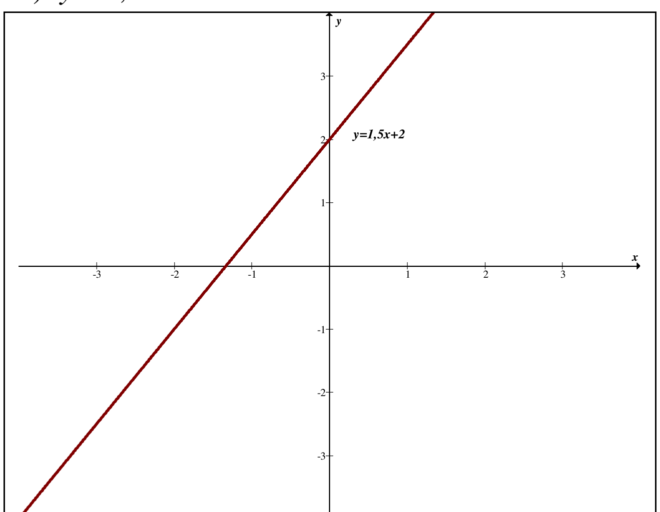


b=-1

$D(f) = IR$

$\operatorname{Im}(f) = IR$

c) $y = 1{,}5x + 2$

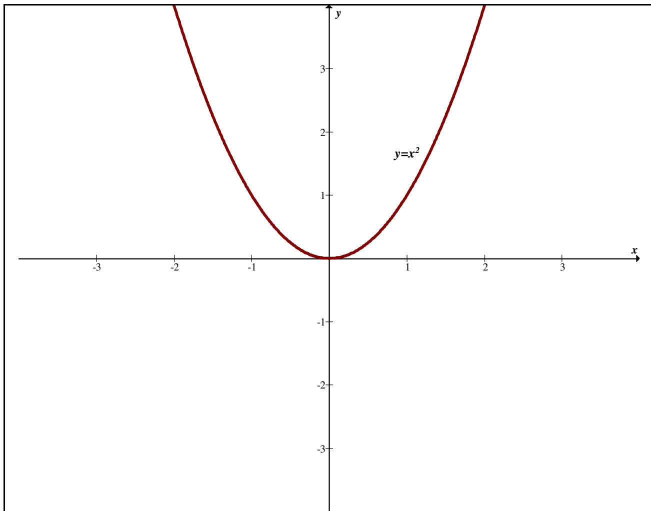


$D(f) = IR$

$\operatorname{Im}(f) = IR$

2. Construir o gráfico das funções quadráticas. Dar o domínio e o conjunto imagem.

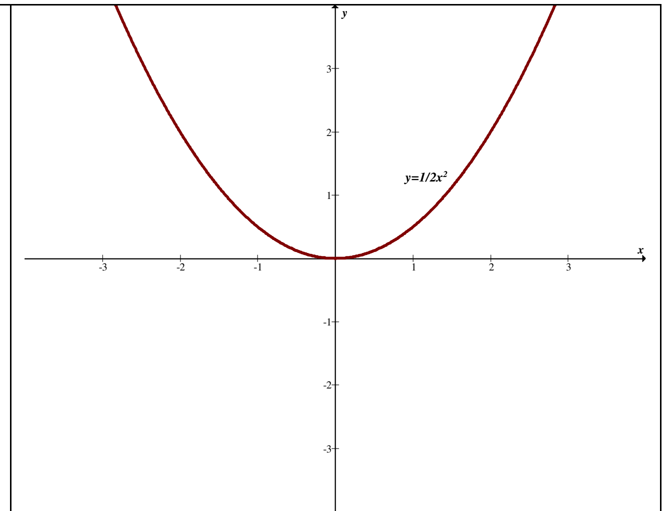
a) $y = ax^2$, se $a = 1, 1/2, -2$.



a=1

$D(f) = IR$

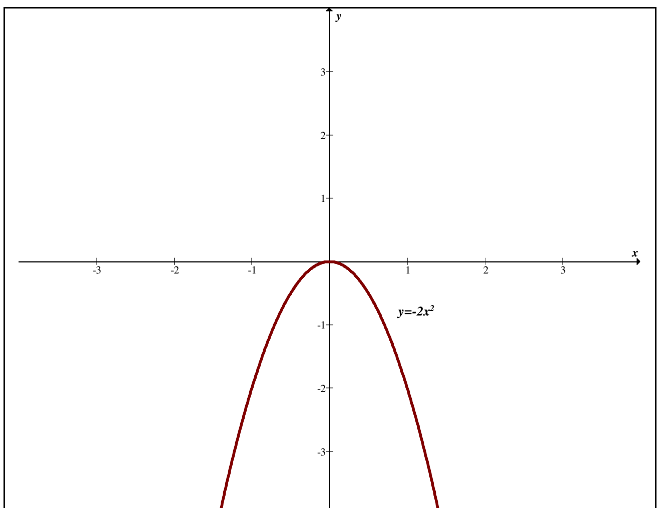
$\mathrm{Im}(f) = [0, +\infty)$



a=1/2

$D(f) = IR$

$\mathrm{Im}(f) = [0, +\infty)$

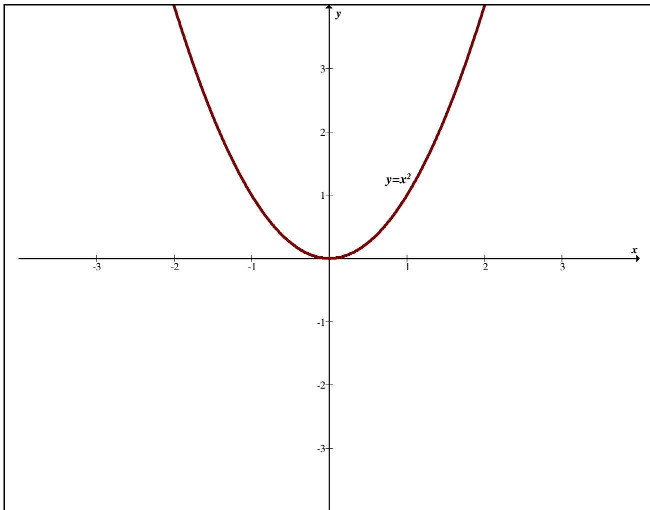


a=-2

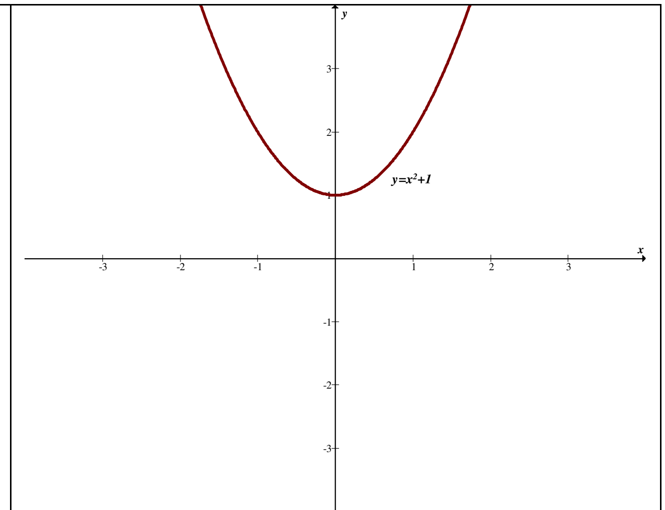
$D(f) = IR$

$\mathrm{Im}(f) = (-\infty, 0]$

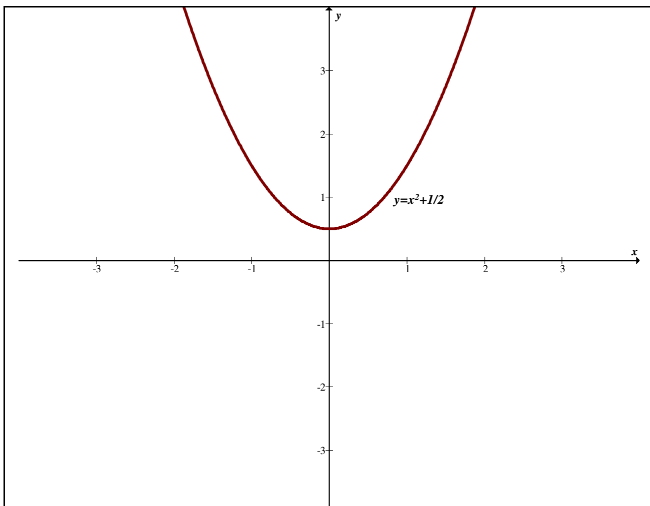
b) $y = x^2 + c$, se $c = 0, 1, 1/2, -3$



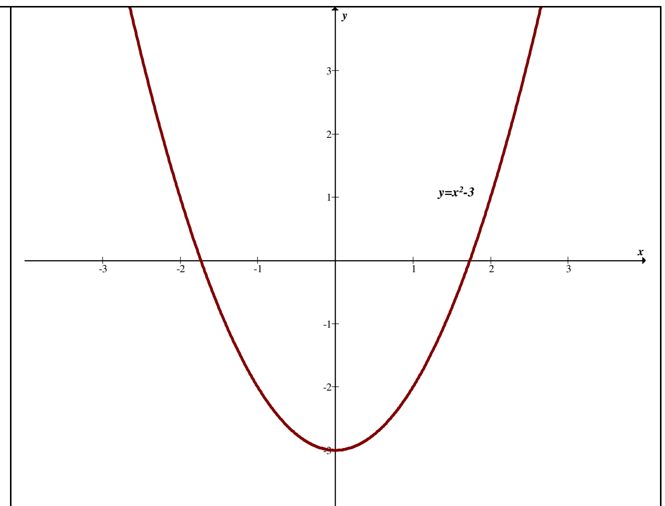
c=0
$D(f) = IR$
$\mathrm{Im}(f) = [0, +\infty)$



c=1
$D(f) = IR$
$\mathrm{Im}(f) = [1, +\infty)$

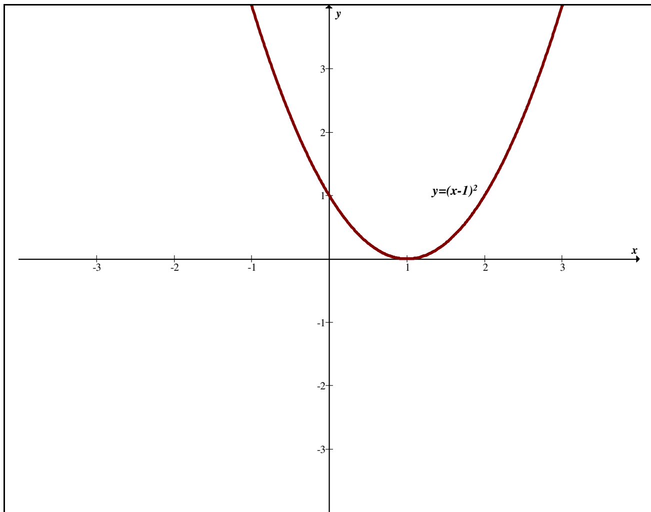


c=1/2
$D(f) = IR$
$\mathrm{Im}(f) = [1/2, +\infty)$

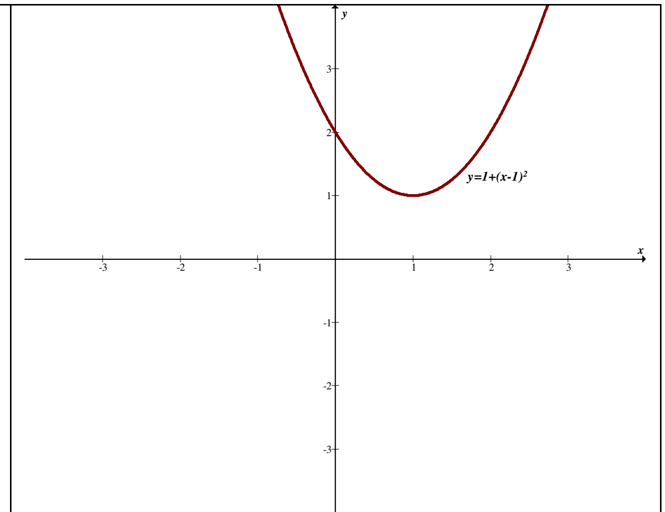


c=-3
$D(f) = IR$
$\mathrm{Im}(f) = [-3, +\infty)$

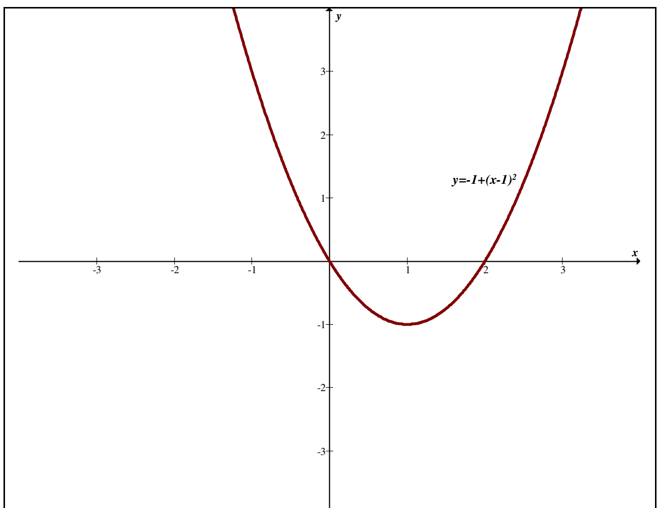
c) $y = y_o + (x-1)^2$, se $y_o = 0, 1, -1$



$y_o = 0$
$D(f) = IR$
$\mathrm{Im}(f) = [0, +\infty)$

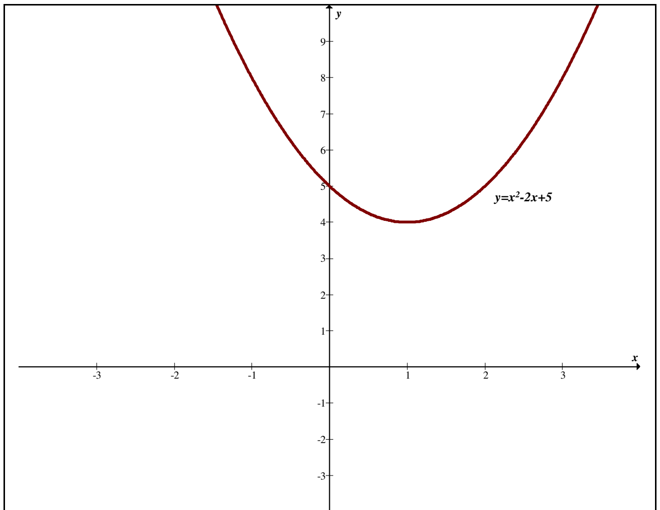


$y_o = 1$
$D(f) = IR$
$\mathrm{Im}(f) = [1, +\infty)$



$y_o = -1$
$D(f) = IR$
$\mathrm{Im}(f) = [-1, +\infty)$

d) $y = ax^2 + bx + c$ se $a = 1, b = -2$ e $c = 5$

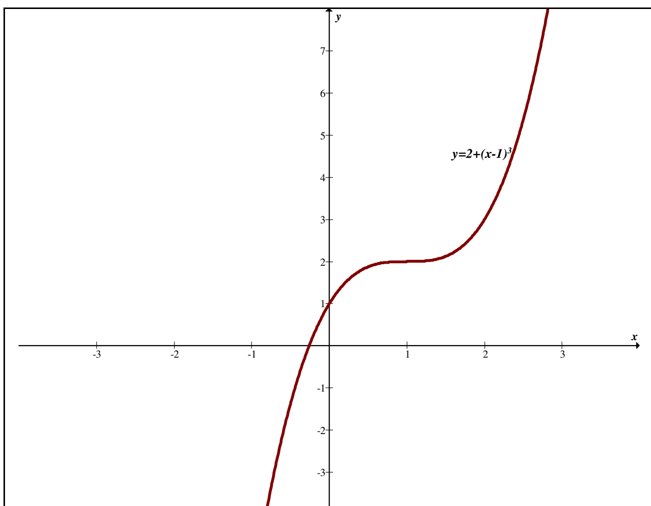


$y = x^2 - 2x + 5$

$D(f) = IR$

$\operatorname{Im}(f) = [4, +\infty)$

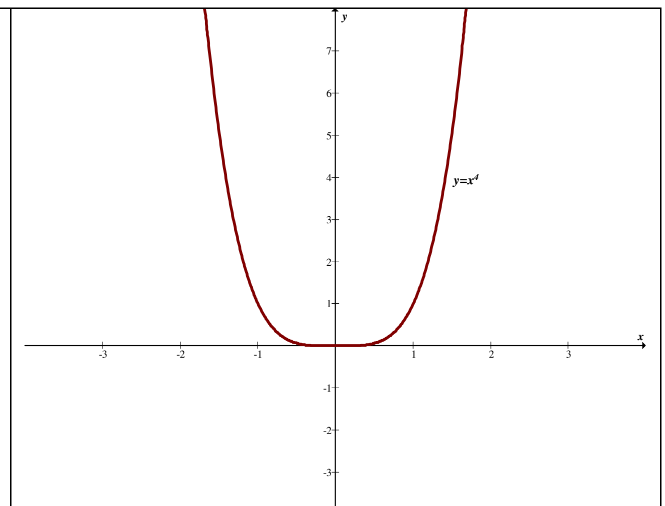
3. Construir os gráficos das funções polinomiais. Dar o domínio e o conjunto imagem.



a) $y = 2 + (x-1)^3$

$D(f) = IR$

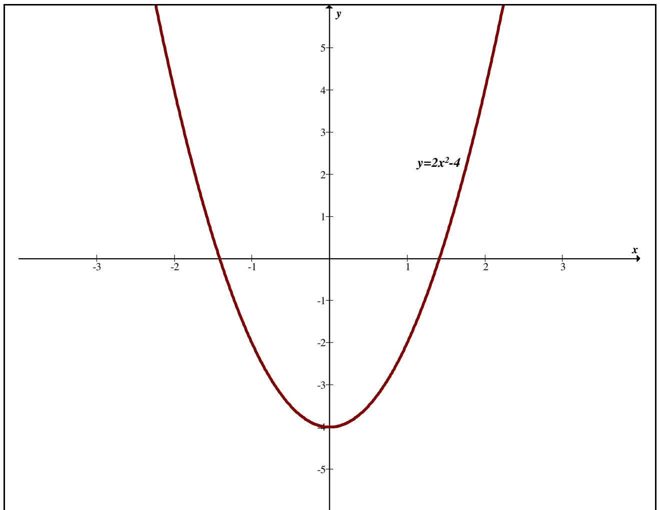
$\operatorname{Im}(f) = \{IR\}$



b) $y = x^4$

$D(f) = IR$

$\operatorname{Im}(f) = [0, +\infty)$

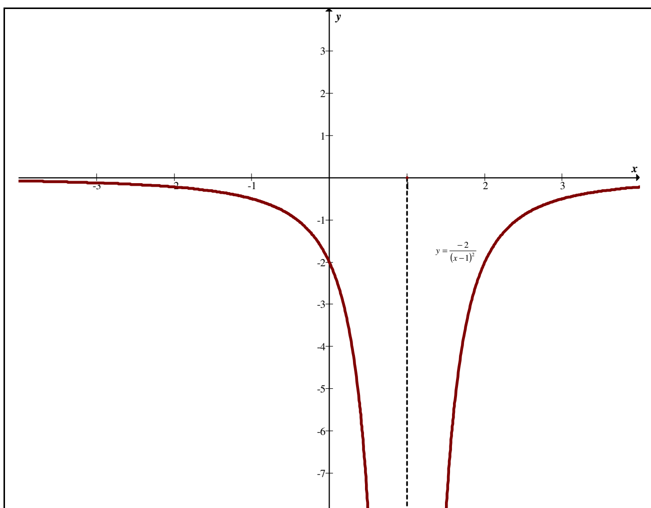


c) $y = 2x^2 - 4$

$D(f) = IR$

$\text{Im}(f) = [-4, +\infty)$

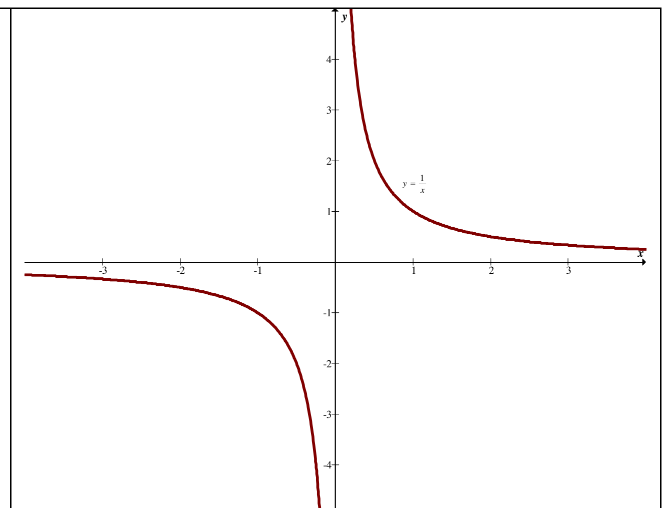
4. Construir os gráficos das funções racionais. Dar o domínio e o conjunto imagem.



a) $y = \dfrac{-2}{(x-1)^2}$

$D(f) = IR - \{1\}$

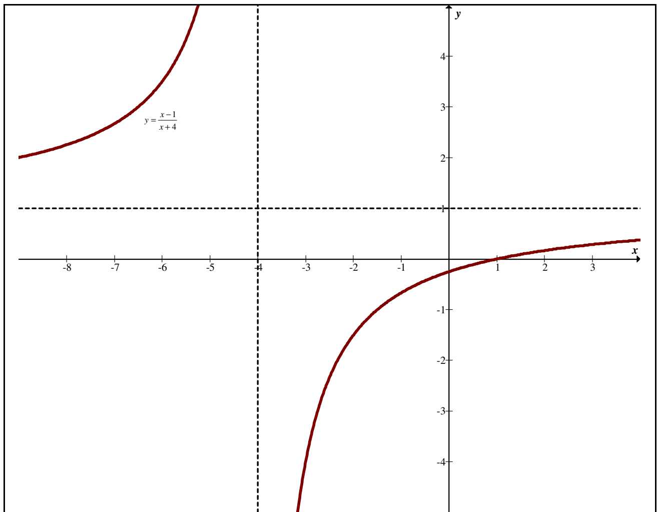
$\text{Im}(f) = (-\infty, 0)$



b) $y = \dfrac{1}{x}$

$D(f) = IR - \{0\}$

$\text{Im}(f) = IR - \{0\}$



c) $y = \dfrac{x-1}{x+4}$

$D(f) = IR - \{-4\}$

$\mathrm{Im}(f) = IR - \{1\}$

5. A função $f(x)$ é do 1° grau. Escreva a função se $f(-1) = 2$ e $f(2) = 3$.

$$f(x) = ax + b$$
$$f(-1) = a(-1) + b = 2$$
$$f(2) = a\,2 + b = 3$$

$$\begin{cases} -a + b = 2 \\ 2a + b = 3 \end{cases} \quad \text{ou}$$

$$\begin{cases} -2a + 2b = 4 \\ \quad 2a + b = 3 \end{cases}$$
$$3b = 7 \therefore b = 7/3$$

$$a = b - 2$$
$$a = 7/3 - 2 = \frac{7-6}{3} = \frac{1}{3}$$

Portanto $f(x) = 1/3\,x + 7/3$

6. Determinar quais das seguintes funções são pares ou ímpares.

a) Par

$$f(x) = 3x^4 - 2x^2 + 1$$
$$f(-x) = 3(-x)^4 - 2(-x)^2 + 1$$
$$= 3x^4 - 2x^2 + 1 = f(x)$$

b) Ímpar

$$f(x) = 5x^3 - 2x$$
$$f(x) = 5(-x)^3 - 2(-x)$$
$$= -5x^3 + 2x$$
$$= -(5x^3 + 2x) = -f(x)$$

c) Não é par nem ímpar

$$f(s) = s^2 + 2s + 2$$
$$f(-s) = (-s)^2 + 2(-s) + 2$$
$$= s^2 - 2s + 2$$

d) Par

$$f(t) = t^6 - 4$$
$$f(-t) = (-t)^6 - 4$$
$$= t^6 - 4 = f(t)$$

e) Par

$$f(x) = |x|$$
$$f(-x) = |-x|$$
$$= |x| = f(x)$$

f) Ímpar

$$f(y) = \frac{y^3 - y}{y^2 + 1}$$
$$f(-y) = \frac{(-y)^3 - (-y)}{(-y)^2 + 1} = \frac{-y^3 + y}{y^2 + 1} = \frac{-(y^3 - y)}{y^2 + 1} = -f(x)$$

g) Não é par nem Ímpar

$$f(x)=\frac{x-1}{x+1}$$

$$f(-x)=\frac{-x-1}{-x+1}=\frac{-(x+1)}{-x+1}=\frac{x+1}{x-1}$$

h) Par

$$f(x)=\frac{1}{2}\left(a^{x}+a^{-x}\right)$$

$$f(-x)=\frac{1}{2}\left(a^{-x}+a^{-(-x)}\right)=\frac{1}{2}\left(a^{-x}+a^{x}\right)=f(x)$$

i) Ímpar

$$f(x)=\ln\frac{1+x}{1-x}$$

$$\begin{aligned}f(-x)=\ln\frac{1-x}{1-(-x)}&=\ln\frac{1-x}{1+x}\\&=\ln(1-x)-\ln(1+x)\\&=-[\ln(1+x)-\ln(1-x)]\\&=-\ln\frac{1+x}{1-x}=-f(x)\end{aligned}$$

j) Ímpar

$$f(x)=\lg\left(x+\sqrt{1+x^{2}}\right)$$

$$\begin{aligned}f(-x)&=\lg\left(-x+\sqrt{1+(-x)^{2}}\right)\\&=\lg\left(-x+\sqrt{1+x^{2}}\right)\\&=\lg\left(\frac{1}{x+\sqrt{1+x^{2}}}\right)\\&=\lg 1-\lg\left(x+\sqrt{1+x^{2}}\right)\\&=-\lg\left(x+\sqrt{1+x^{2}}\right)\end{aligned}$$

7. Demonstre que se f e g são funções ímpares, então $(f+g)$ e $(f-g)$ são também funções ímpares.

f é ímpar $\overset{(def)}{\Leftrightarrow}$ $f(x)=-f(-x)$ (1)

g é ímpar $\overset{(def)}{\Leftrightarrow}$ $g(x)=-g(-x)$ (2)

De (1) e (2) escrevemos

$$
\begin{aligned}
(f+g)(x) &= f(x)+g(x) \\
&= -f(-x)-g(-x) \\
&= -[f(-x)-g(-x)] \\
&= -[(f+g)(-x)]
\end{aligned}
$$

Portanto, $(f+g)$ é ímpar.

$$
\begin{aligned}
(f-g)(x) &= f(x)-g(x) \\
&= -f(-x)-[-g(-x)] \\
&= -f(-x)+g(-x) \\
&= -[f(-x)-g(-x)] \\
&= -[(f-g)(-x)]
\end{aligned}
$$

Portanto, $(f-g)$ é ímpar.

8. Demonstre que se f e g são funções ímpares, então $f \cdot g$ e f/g são funções pares.

f é ímpar $\overset{(def)}{\Leftrightarrow}$ $f(x)=-f(-x)$ (1)

g é ímpar $\overset{(def)}{\Leftrightarrow}$ $g(x)=-g(-x)$ (2)

De (1) e (2) escrevemos

$$
\begin{aligned}
(f \cdot g)(x) &= f(x)\cdot g(x) \\
&= -f(-x)\cdot[-g(-x)] \\
&= f(-x)\cdot g(-x) \\
&= f \cdot g\,(-x)
\end{aligned}
$$

Portanto, $f \cdot g$ é par.

$$
\begin{aligned}
(f/g)(x) &= \frac{f(x)}{g(x)} \\
&= \frac{-f(-x)}{-g(-x)} \\
&= \frac{f(-x)}{g(-x)} \\
&= (f/g)(-x)
\end{aligned}
$$

Portanto, f/g é par.

9. Mostre que a função $\frac{1}{2}[f(x)+f(-x)]$ é par e que a função $\frac{1}{2}[f(x)-f(-x)]$ é ímpar.

Seja $g(x)=\frac{1}{2}[f(x)+f(-x)]$. Temos,

$$
\begin{aligned}
g(x) &= \frac{1}{2}[f(x)+f(-x)] \\
&= \frac{1}{2}[f(-x)+f(x)] \\
&= g(-x)
\end{aligned}
$$

Portanto, $g(x)$ é par.

Seja $h(x)=\frac{1}{2}[f(x)-f(-x)]$. Temos,

$$
\begin{aligned}
h(-x) &= \frac{1}{2}[f(-x)-f(x)] \\
&= -\frac{1}{2}[f(x)-f(-x)] \\
&= -h(x)
\end{aligned}
$$

Portanto, $h(x)$ é ímpar.

10. Demonstre que qualquer função $f: IR \rightarrow IR$ pode ser expressa como a soma de uma função par com uma função ímpar.

Queremos mostrar que se $h(x)$ é uma função qualquer podemos escrever:
$h(x)=f(x)+g(x)$, sendo que $f(x)$ é par e $g(x)$ é ímpar.

Usando o exercício anterior podemos fazer

$f(x)=\frac{1}{2}[h(x)+h(-x)]$ e $g(x)=\frac{1}{2}[h(x)-h(-x)]$

De fato

$$f(x)+g(x)=\frac{1}{2}h(x)+\frac{1}{2}h(-x)+\frac{1}{2}h(x)-\frac{1}{2}h(-x)=h(x)$$

11. Expresse as funções seguintes como a soma de uma função par e uma função ímpar.

a) $f(x) = x^2 + 2$
Basta fazer $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$ com:

$$f_1(x) = \frac{1}{2}\left[x^2 + 2 + (-x)^2 + 2\right]$$
$$= \frac{1}{2}\left[2x^2 + 4\right]$$
$$= x^2 + 2$$

Temos $f_1(x)$ par.

$$f_2(x) = \frac{1}{2}\left[x^2 + 2 - (-x)^2 - 2\right]$$
$$= \frac{1}{2}\left[x^2 + 2 - x^2 - 2\right]$$
$$= 0$$

Temos $f_2(x)$ ímpar.

b) $f(x) = x^3 - 1$
Basta fazer $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$ com:

$$f_1(x) = \frac{1}{2}\left[x^3 - 1 + (-x)^3 - 1\right]$$
$$= \frac{1}{2}\left[x^3 - 1 - x^3 - 1\right]$$
$$= \frac{1}{2}(-2) = -1$$

Temos $f_1(x)$ par.

$$f_2(x) = \frac{1}{2}\left[x^3 - 1 - (-x)^3 + 1\right]$$
$$= \frac{1}{2}\left[x^3 - 1 + x^3 + 1\right]$$
$$= \frac{1}{2}\,2x^3 = x^3$$

Temos $f_2(x)$ ímpar

c) $f(x) = \dfrac{x-1}{x+1}$
Basta fazer $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$ com:

$$f_1(x) = \frac{1}{2}\left[\frac{x-1}{x+1} + \frac{-x-1}{-x+1}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\,\frac{(x-1)(1-x)+(-x-1)(x+1)}{(x+1)(1-x)}$$

$$= \frac{1}{2}\,\frac{-\left(x^2-2x+1\right)-\left(x^2+2x+1\right)}{-\left(x^2-1\right)}$$

$$= \frac{1}{2}\,\frac{-2x^2-2}{-\left(x^2-1\right)} = \frac{x^2+1}{x^2-1}$$

Temos $f_1(x)$ par.

$$f_2(x) = \frac{1}{2}\left[\frac{x-1}{x+1} - \frac{-x-1}{-x+1}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{x-1}{x+1} - \frac{x+1}{x-1}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\,\frac{(x-1)^2-(x+1)^2}{x^2-1}$$

$$= \frac{1}{2}\,\frac{x^2-2x+1-x^2-2x-1}{x^2-1}$$

$$= \frac{1}{2}\,\frac{-4x}{x^2-1} = \frac{-2x}{x^2-1}$$

Temos $f_2(x)$ ímpar.

d) $f(x) = |x| + |x-1|$

$$f(x) = \frac{1}{2}\left[|x| + |x-1| + |-x| + |-x-1|\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[|x| + |x-1| + |x| + |-x-1|\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[2|x| + |x-1| + |x+1|\right]$$

Temos $f_1(x)$ par.

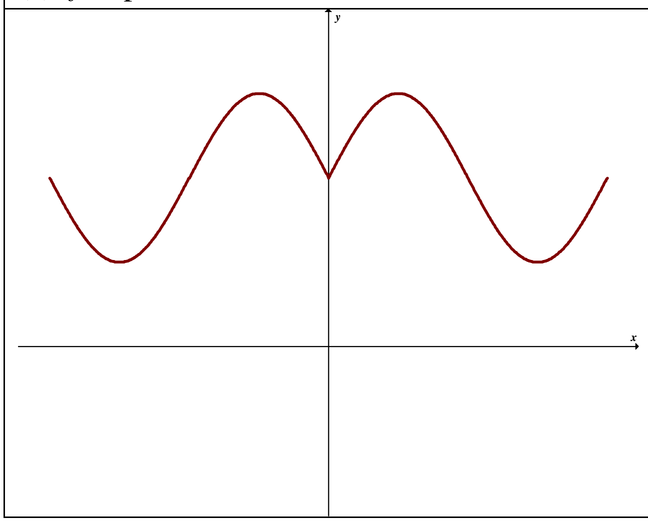
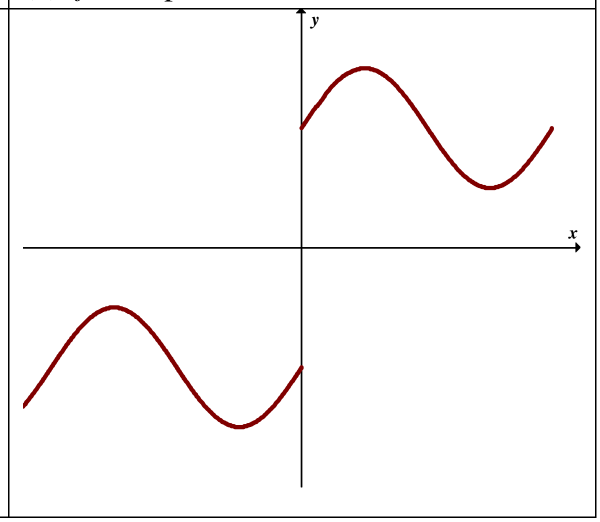
$$f_2(x) = \frac{1}{2}\left[|x| + |x-1| - |-x| - |-x-1|\right]$$
$$= \frac{1}{2}\left[|x| + |x-1| - |x| - |x+1|\right]$$
$$= \frac{1}{2}\left[|x-1| - |x+1|\right]$$

Temos $f_2(x)$ ímpar.

12. Seja $f(x)$ uma função cujo gráfico para $x \geq 0$, tem o aspecto indicado na figura. Completar esse gráfico no domínio $x < 0$ se:

(a) f é par

(b) f é ímpar

(a) f é par	(b) f é ímpar
	

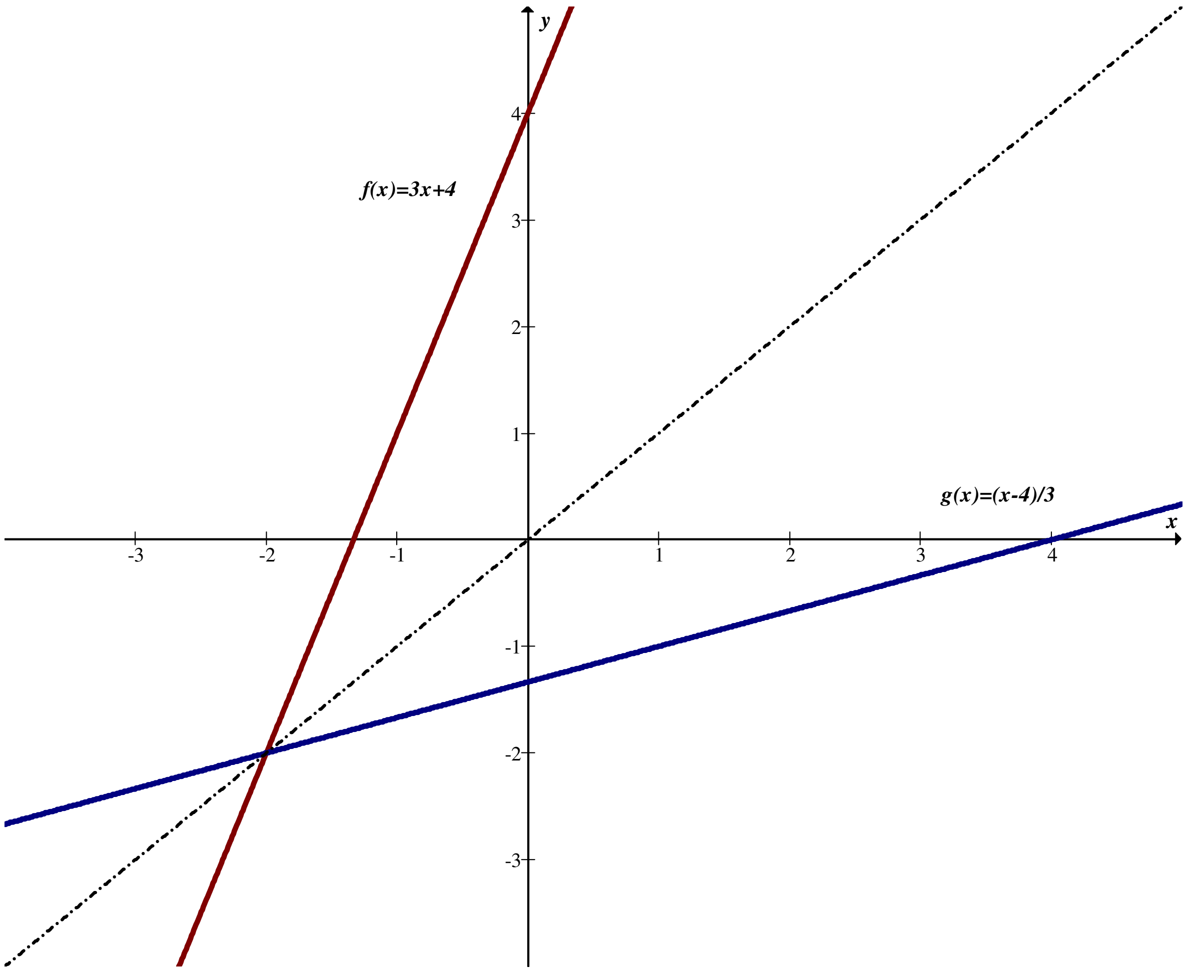
13. Em cada um dos exercícios determine a fórmula da função inversa. Fazer os gráficos da função dada e de sua inversa.

a) $y = 3x + 4$

$3x = y - 4$

$x = \dfrac{y-4}{3}$

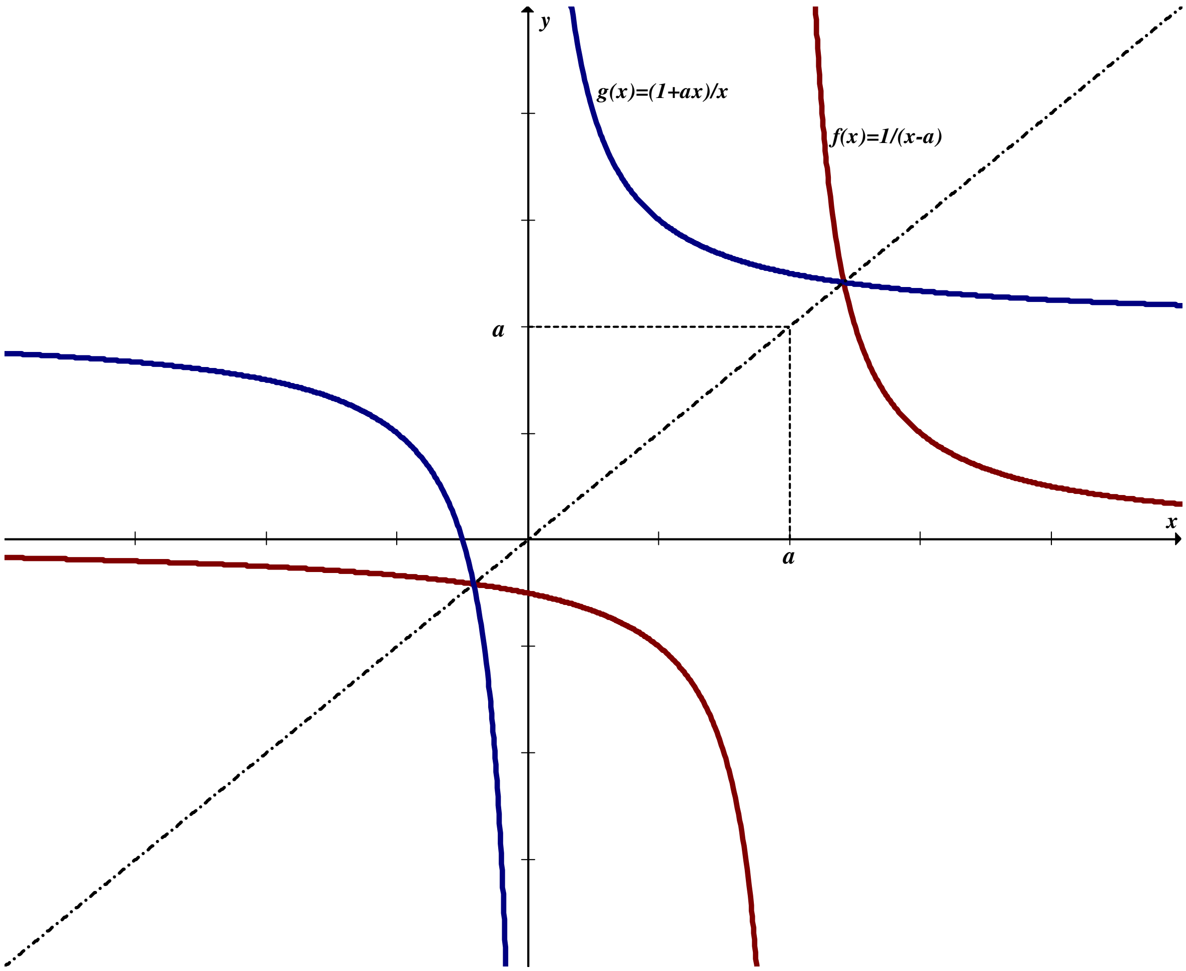
Assim, a função $f(x) = 3x + 4$ tem com função inversa a função $g(x) = \dfrac{x-4}{3}$. O gráfico que segue apresenta essas funções e a sua simetria com a reta $y = x$.



b) $y = \dfrac{1}{x-a}$

$$y(x-a) = 1$$
$$xy - ay = 1$$
$$x = \frac{1+ay}{y}$$

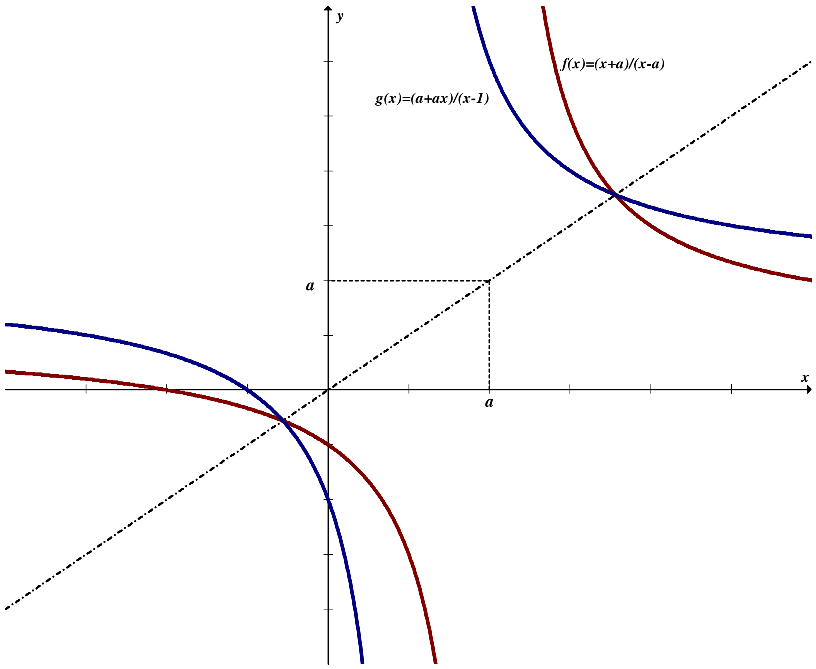
Assim, a função $f(x) = \dfrac{1}{x-a}$ tem com função inversa a função $g(x) = \dfrac{1+ax}{x}$. O gráfico que segue apresenta essas funções e a sua simetria com a reta $y = x$. Observar que o exemplo gráfico está sendo apresentado com o valor de $a > 0$.



c) $y = \dfrac{x+a}{x-a}$

$$xy - ay = x + a$$
$$xy - x = a + ay$$
$$x = \frac{a+ay}{y-1}$$

Assim, a função $f(x) = \dfrac{x+a}{x-a}$ tem com função inversa a função $g(x) = \dfrac{a+ax}{x-1}$. O gráfico que segue apresenta essas funções e a sua simetria com a reta $y = x$. Observar que o exemplo gráfico está sendo apresentado com o valor de $a > 0$.

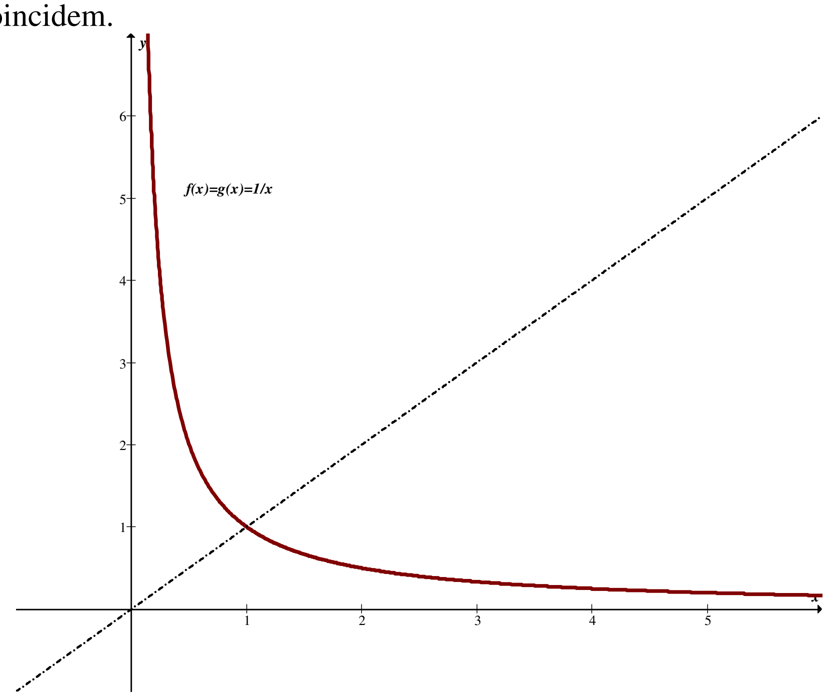


d) $y = \dfrac{1}{x}, \quad x > 0$

$xy = 1$

$x = \dfrac{1}{y}, \quad y > 0$

Assim, a função $y = \dfrac{1}{x}, \quad x > 0$ tem com função inversa a função $g(x) = \dfrac{1}{x}$. O gráfico que segue apresenta essas funções e a sua simetria com a reta $y = x$. Observar que as funções coincidem.

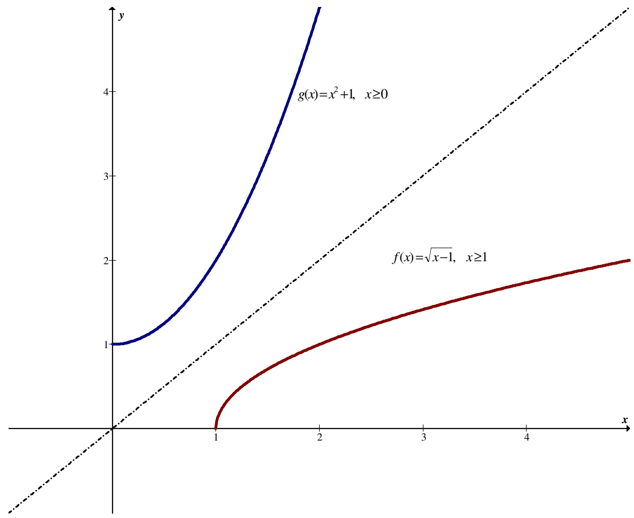


e) $y = \sqrt{x-1}, \quad x \geq 1$

$y^2 = x - 1$

$x = y^2 + 1, \quad y \geq 0$

Assim, a função $y = \sqrt{x-1}, \quad x \geq 1$ tem com função inversa a função $g(x) = x^2 + 1, \quad x \geq 0$. O gráfico que segue apresenta essas funções e a sua simetria com a reta $y = x$.

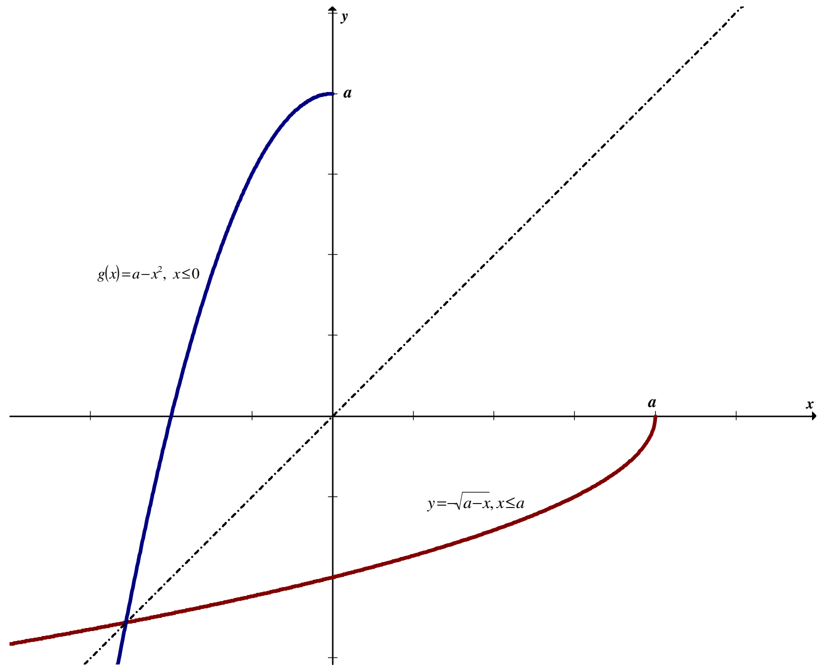


f) $y = -\sqrt{a-x}, x \leq a$

$y^2 = a - x$

$x = a - y^2, y \leq 0$

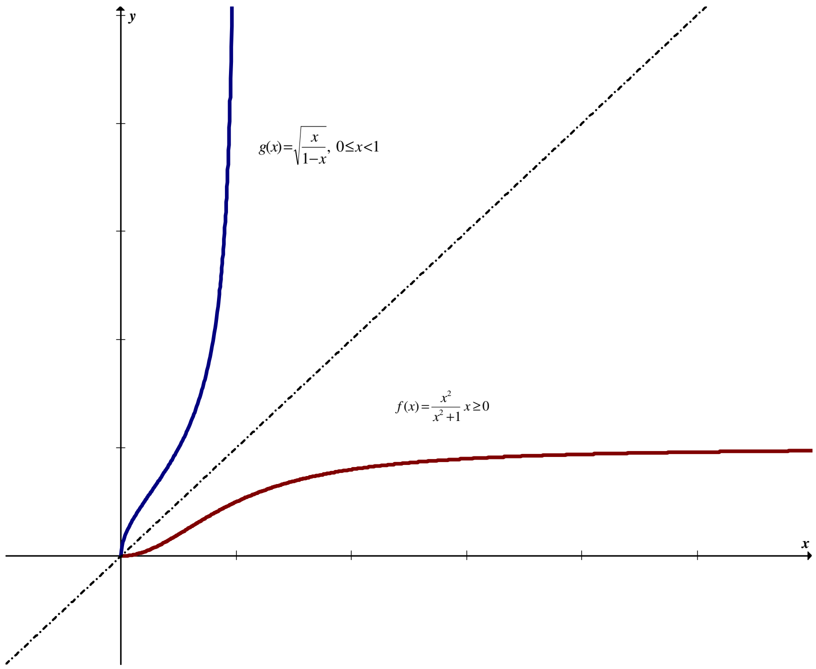
Assim, a função $f(x) = -\sqrt{a-x}, x \leq a$ tem com função inversa a função $g(x) = a - x^2, \ x \leq 0$. O gráfico que segue apresenta essas funções e a sua simetria com a reta $y = x$. Observar que o exemplo gráfico está sendo apresentado com o valor de $a > 0$.



g) $y = \dfrac{x^2}{x^2+1}\ x \geq 0$

$yx^2 + y = x^2$
$yx^2 - x^2 = -y$
$x^2(y-1) = -y$
$x^2 = \dfrac{-y}{y-1}$
$x = \sqrt{\dfrac{-y}{y-1}} = \sqrt{\dfrac{y}{1-y}}, 0 \leq y < 1$

Assim, a função $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2+1}\ x \geq 0$ tem como inversa a função $g(x) = \sqrt{\dfrac{x}{1-x}},\ 0 \leq x < 1$. O gráfico que segue apresenta essas funções e a sua simetria com a reta $y = x$.

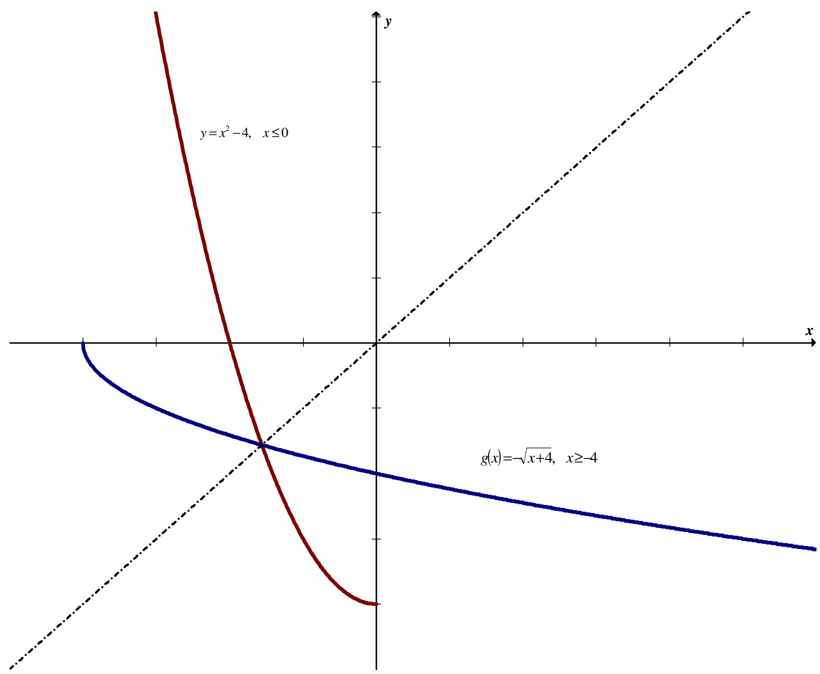


h) $y = x^2 - 4, \quad x \le 0$

$$x^2 = y + 4$$
$$x = -\sqrt{y+4}$$

$$g(x) = -\sqrt{x+4}, \quad x \ge -4$$

Assim, a função $f(x) = x^2 - 4, \quad x \le 0$ tem como inversa a função $g(x) = -\sqrt{x+4}, \quad x \ge -4$. O gráfico que segue apresenta essas funções e a sua simetria com a reta $y = x$.

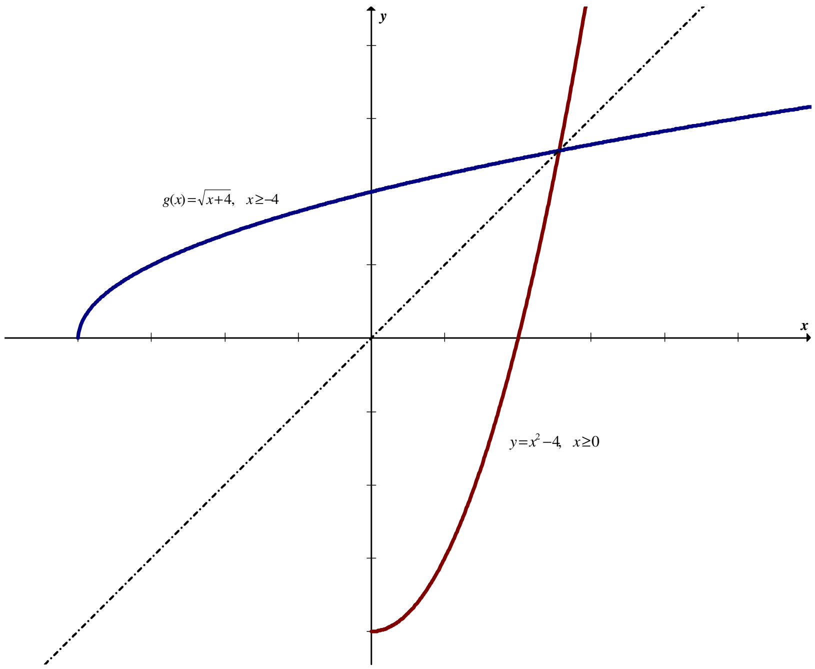


i) $y = x^2 - 4, \quad x \ge 0$

$x^2 = y + 4$
$x = \sqrt{y+4}$

$g(x) = \sqrt{x+4}, \quad x \ge -4$

Assim, a função $y = x^2 - 4, \quad x \ge 0$ tem como inversa a função $g(x) = \sqrt{x+4}, \quad x \ge -4$. O gráfico que segue apresenta essas funções e a sua simetria com a reta $y = x$.



14. Mostre que a função $y = f(x) = \dfrac{x+2}{2x-1}$ coincide com a sua inversa, isto é, $x = f(y)$ ou $f[f(x)] = x$.

$$y = \frac{x+2}{2x-1}, \quad x \neq \frac{1}{2}$$
$$2yx - y = x + 2$$
$$2xy - x = y + 2$$
$$x(2y-1) = y + 2$$

$$x = \frac{y+2}{2y-1} = f(y) \ \text{ com } \ y \neq \frac{1}{2}$$

ou

$$f[f(x)] = f\left(\frac{x+2}{2x-1}\right) = \frac{\dfrac{x+2}{2x-1} + 2}{2\left(\dfrac{x+2}{2x-1}\right) - 1} = \frac{\dfrac{x+2+4x-2}{2x-1}}{\dfrac{2x+4-2x+1}{2x-1}} = \frac{5x}{2x-1} \cdot \frac{2x-1}{5} = x\,, \ x \neq \frac{1}{2}$$

15. Dada a função $y = f(x) = \sqrt{\dfrac{x}{1+x^2}}$ definida para todo x real, demonstrar que sua inversa é a função $x = g(y) = \dfrac{y}{\sqrt{1-y^2}}$ definida para $|y| < 1$

$$y = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$
$$y^2 = \frac{x^2}{1+x^2}$$
$$y^2 + x^2y^2 = x^2$$
$$-x^2y^2 + x^2 = y^2$$
$$x^2(1-y^2) = y^2$$
$$x^2 = \frac{y^2}{1-y^2}$$
$$x = \frac{y}{\sqrt{1-y^2}}$$

considerando-se que

$$1 - y^2 \geq 0$$
$$(1-y)(1+y) \geq 0$$
$$-1 < y < 1$$

ou $|y| < 1$

16. Dada $f(x) = \begin{cases} x & , \quad x < 1 \\ x^2 & , \quad 1 \leq x \leq 9 \\ 27\sqrt{x} & , \quad x > 9 \end{cases}$

verifique que f tem uma função inversa e encontre $f^{-1}(x)$.

Para $x < 1$, temos $y = x$.

Para $1 \leq x \leq 9$, temos $y = x^2 \quad \therefore \quad x = \sqrt{y}$

Para $x > 9$, temos

$y = 27\sqrt{x}$

$y^2 = 27^2 \cdot x$

$x = \dfrac{y^2}{27^2} = \left(\dfrac{y}{27}\right)^2$

Assim, $g(y) = \begin{cases} y & , \quad y < 1 \\ \sqrt{y} & , \quad 1 \le y \le 81 \\ \left(\dfrac{y}{27}\right)^2 & , \quad y > 81 \end{cases}$ ou $f^{-1}(x) = \begin{cases} x & , \quad x < 1 \\ \sqrt{x} & , \quad 1 \le x \le 81 \\ \left(\dfrac{x}{27}\right)^2 & , \quad x > 81 \end{cases}$

17. Se $f(x)$ e $g(x)$ são periódicas de período T, prove que:
(a) $h(x) = f(x) + g(x)$ tem período T.
(b) $h(x) = f(x) \cdot g(x)$ é periódica de período T.
(c) $h(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$, $g(x) \neq 0$ para todo *x* é periódica de período T.

Se $f(x)$ é periódica de período T temos que existe um número real $T \neq 0$ tal que $f(x+T) = f(x)$ para todo $x \in D(f)$.
Se $g(x)$ é periódica de período T temos que existe um número real $T \neq 0$ tal que $g(x+T) = g(x)$ para todo $x \in D(g)$.
Assim:

(a) $h(x) = f(x) + g(x) = f(x+T) + g(x+T) = h(x+T)$ para o número real $T \neq 0$ com $x \in D(f+g)$. Portanto $h(x) = f(x) + g(x)$ é periódica de período T.

(b) $h(x) = f(x) \cdot g(x) = f(x+T) \cdot g(x+T) = h(x+T)$ para o número real $T \neq 0$ com $x \in D(fg)$. Portanto $h(x) = f(x) \cdot g(x)$ é periódica de período T.

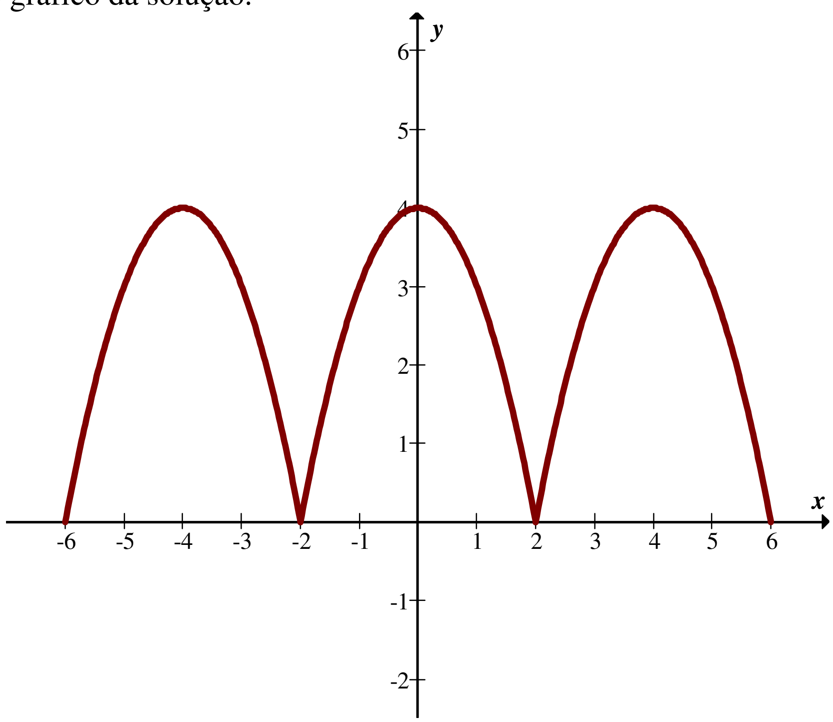
(c) $h(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{f(x+T)}{g(x+T)} = h(x+T)$, $g(x+T) \neq 0$ para o número real $T \neq 0$ com $x \in D(f/g)$. Portanto $h(x) = f(x)/g(x)$ é periódica de período T.

18. Se $f(x)$ é periódica de período T, prove que 3T também é período de *f*.
Se $f(x)$ é periódica de período T temos que existe um número real $T \neq 0$ tal que $f(x+T) = f(x)$ para todo $x \in D(f)$. Dessa forma, $x + T \in D(f)$.

Aplicando novamente a definição, temos
$f(x+2T)=f((x+T)+T)=f(x+T)=f(x)$. Dessa forma, $x+2T \in D(f)$. Repetindo o raciocínio, vem:
$f(x+3T)=f((x+2T)+T)=f(x+2T)=f(x)$, para todo $x \in D(f)$.
Podemos concluir, então, que 3T é período da função $f(x)$.

19. Sabendo que $f(x)$ é uma função par e periódica de período T=4, complete o seu gráfico.

Segue o gráfico da solução.



20. Se $f(x)=2^x$, mostre que $f(x+3)-f(x-1)=\dfrac{15}{2}f(x)$

$$2^{x+3}-2^{x-1}=\frac{15}{2}2^x$$

$$2^x\left(2^3-2^{-1}\right)=2^x\left(8-\frac{1}{2}\right)=2^x\,\frac{16-1}{2}=\frac{15}{2}2^x=\frac{15}{2}f(x)$$

21. Seja $\varphi(x)=\dfrac{1}{2}\left(a^x+a^{-x}\right)$ e $\psi(x)=\dfrac{1}{2}\left(a^x-a^{-x}\right)$. Demonstrar que:

$$\varphi(x+y)=\varphi(x).\varphi(y)+\psi(x).\psi(y)$$

Temos,

$$\varphi(x)\,.\,\varphi(y)+\psi(x)\,.\,\psi(y)=$$

$$=\frac{1}{2}\left(a^{x}+a^{-x}\right).\frac{1}{2}\left(a^{y}+a^{-y}\right)+\frac{1}{2}\left(a^{x}-a^{-x}\right).\frac{1}{2}\left(a^{y}-a^{-y}\right)$$

$$=\frac{1}{4}\left(a^{x}\,.\,a^{y}+a^{x}\,.\,a^{-y}+a^{-x}\,.\,a^{y}+\ a^{-x}\,.\,a^{-y}\right)+\frac{1}{4}\left(a^{x}\,.\,a^{y}-a^{x}\,.\,a^{-y}-a^{-x}\,.\,a^{y}-\ a^{-x}\,.\,a^{-y}\right)$$

$$=\frac{1}{4}\left(a^{x+y}+a^{x-y}+a^{y-x}+a^{-x-y}+a^{x+y}-a^{x-y}-a^{y-x}+a^{-x-y}\right)$$

$$=\frac{1}{4}\left(2\,a^{x+y}+2\,a^{-x-y}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(a^{x+y}+a^{-x-y}\right)$$

$$=\varphi(x+y)$$

$$\psi(x+y)=\varphi(x)\,.\,\psi(y)+\varphi(y)\,.\,\psi(x)$$

Temos,

$$\varphi(x)\,.\,\psi(y)+\varphi(y)\,.\,\psi(x)=$$

$$=\frac{1}{2}\left(a^{x}+a^{-x}\right).\frac{1}{2}\left(a^{y}-a^{-y}\right)+\frac{1}{2}\left(a^{y}+a^{-y}\right).\frac{1}{2}\left(a^{x}-a^{-x}\right)$$

$$=\frac{1}{4}\left(a^{x+y}-a^{x-y}+a^{-x+y}-a^{-x-y}+a^{x+y}-a^{y-x}+a^{-y+x}-a^{-x-y}\right)$$

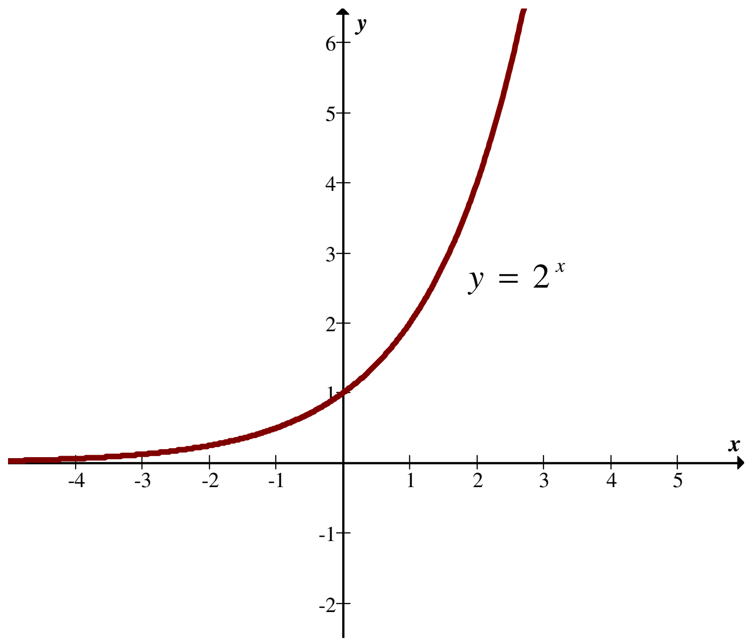
$$=\frac{1}{4}\left(2\,a^{x+y}-2\,a^{-x-y}\right)$$

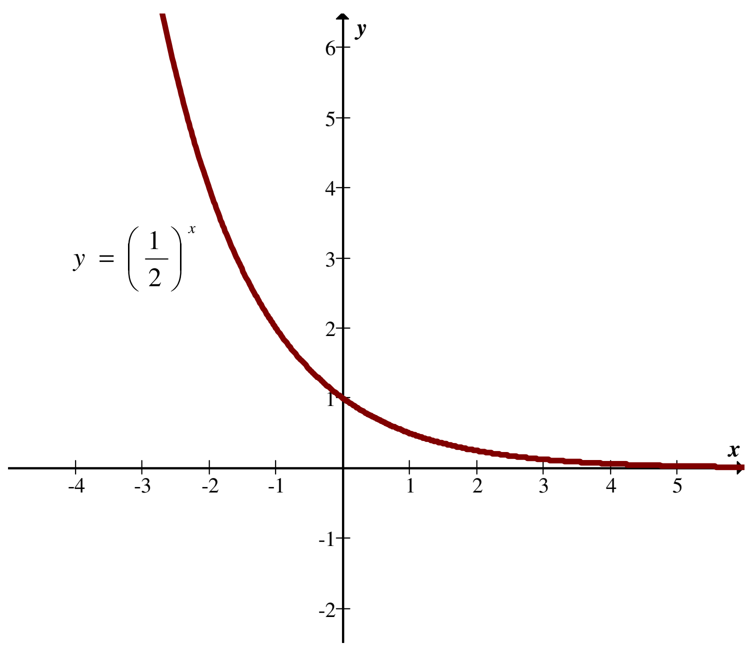
$$=\frac{1}{2}\left(a^{x+y}-a^{-(x+y)}\right)$$

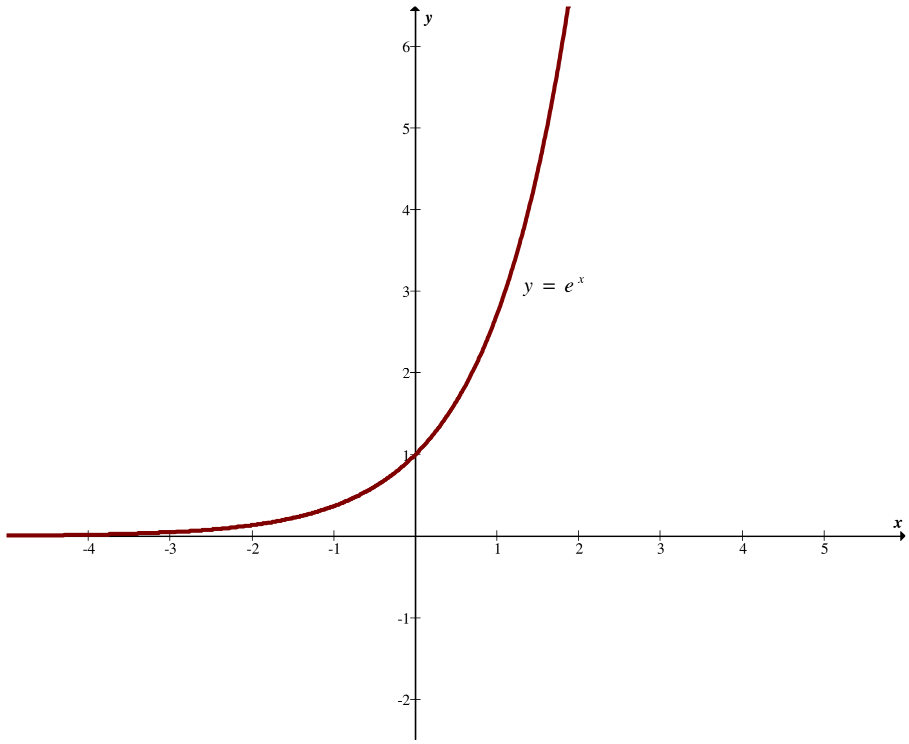
$$=\psi(x+y)$$

22. Construir o gráfico das seguintes funções exponenciais.

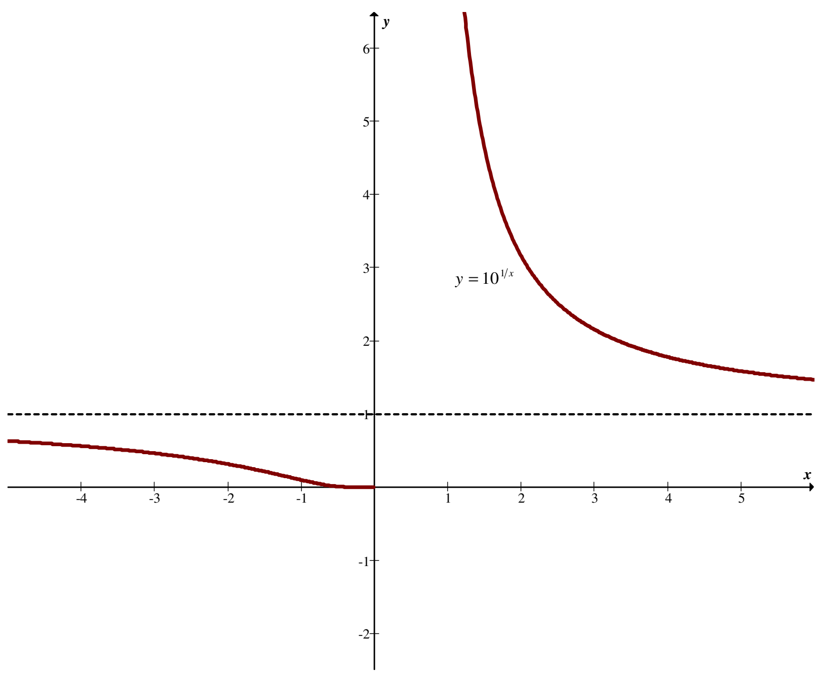
a) $y=a^{x}$, se $a=2,\ \frac{1}{2},\ e\ \left(e=2{,}718\ldots\right)$


y
6
5
4
3
$y = 2^x$
2
1
x
-4
-3
-2
-1
1
2
3
4
5
-1
-2

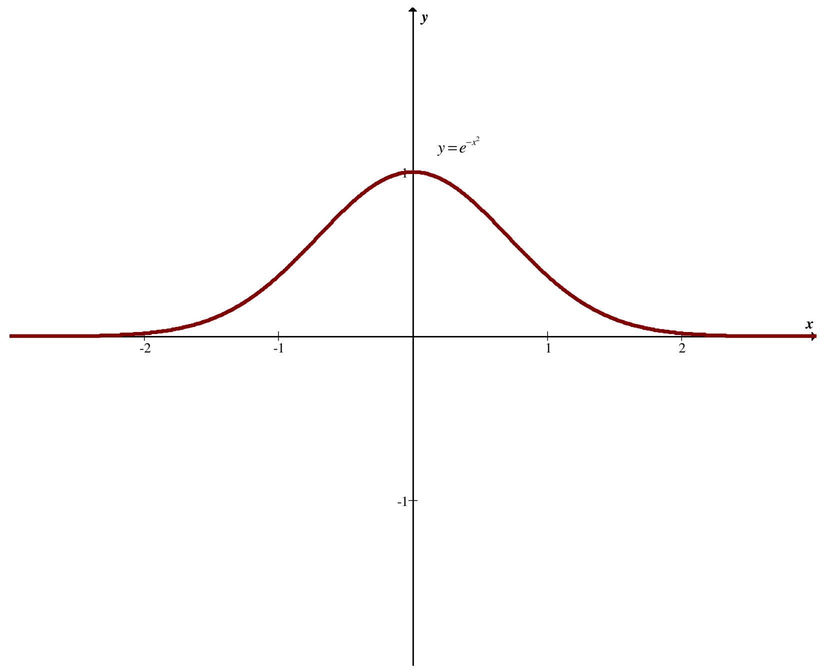

y
6
5
4
$y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$
3
2
1
x
-4
-3
-2
-1
1
2
3
4
5
-1
-2



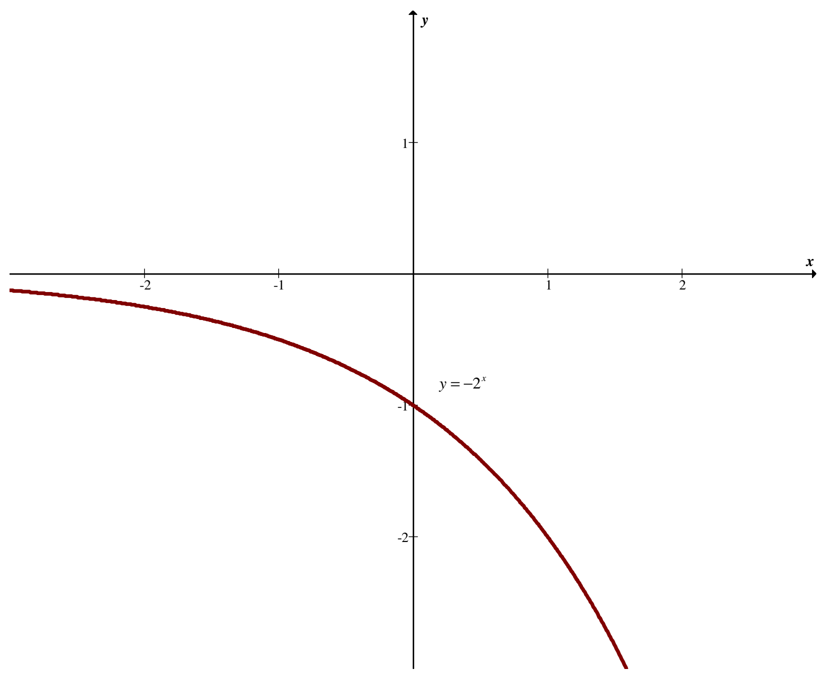
b) $y = 10^{1/x}$



c) $y = e^{-x^2}$



d) $y = -2^x$



23. Dada $\varphi(x) = \lg \dfrac{1-x}{1+x}$. Verifique a igualdade $\varphi(a) + \varphi(b) = \varphi\left(\dfrac{a+b}{1+ab}\right)$

$$\varphi(a)+\varphi(b)=\lg\left(\frac{1-a}{1+a}\right)+\lg\left(\frac{1-b}{1+b}\right)=\lg\left(\frac{1-a}{1+a}\cdot\frac{1-b}{1+b}\right)=\lg\left(\frac{(1-a)(1-b)}{(1+a)(1+b)}\right)$$

$$=\lg\left(\frac{1-b-a+ab}{1+a+b+ab}\right)$$

$$\varphi\left(\frac{a+b}{1+ab}\right)=\lg\left(\frac{1-\dfrac{a+b}{1+ab}}{1+\dfrac{a+b}{1+ab}}\right)=\lg\left(1-\frac{a+b}{1+ab}\cdot\frac{1+ab}{1+ab+a+b}\right)$$

$$=\lg\left(\frac{1+ab-a-b}{1+ab}\cdot\frac{1+ab}{1+ab+a+b}\right)$$

$$=\lg\left(\frac{1+ab-a-b}{1+ab+a+b}\right)=\varphi(a)+\varphi(b)$$

24. Dado $f(x)=\log x$ e $g(x)=x^3$. Forme as expressões.

a) $f[g(2)]$

$f[g(2)]=f[2^3]=f(8)=\log 8$

b) $f[g(a)],\quad a>0$

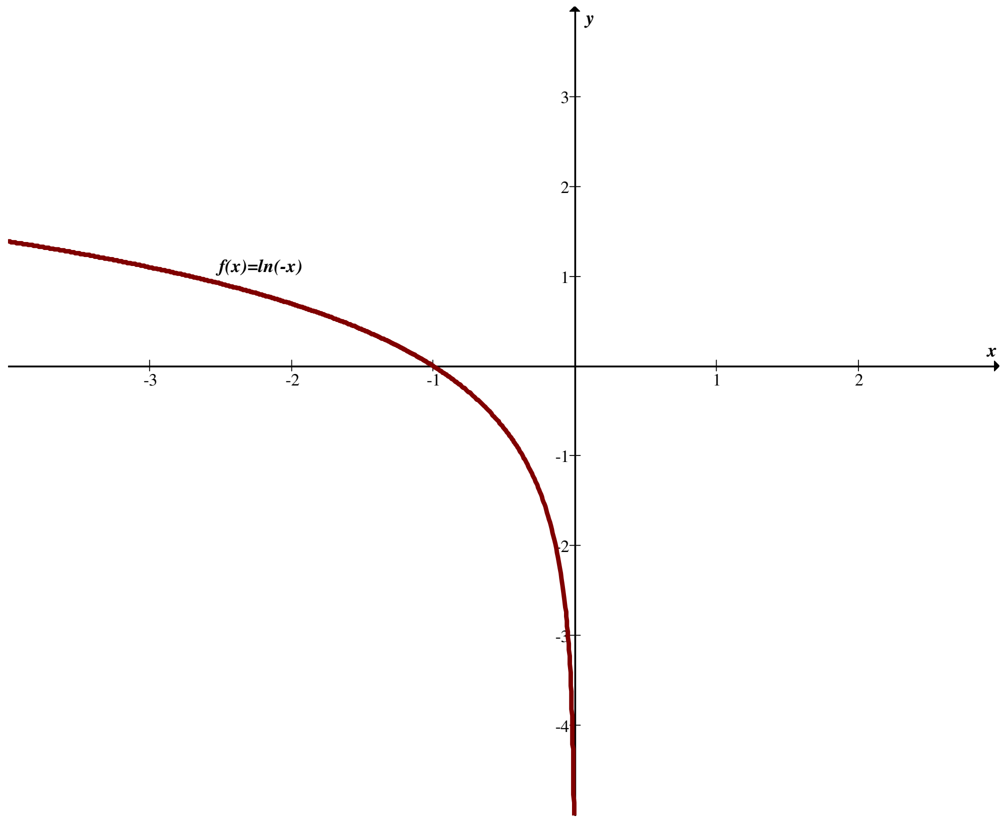
$f[g(a)]=f[a^3]=\log a^3=3\log a$

c) $g[f(a)],\quad a>0$

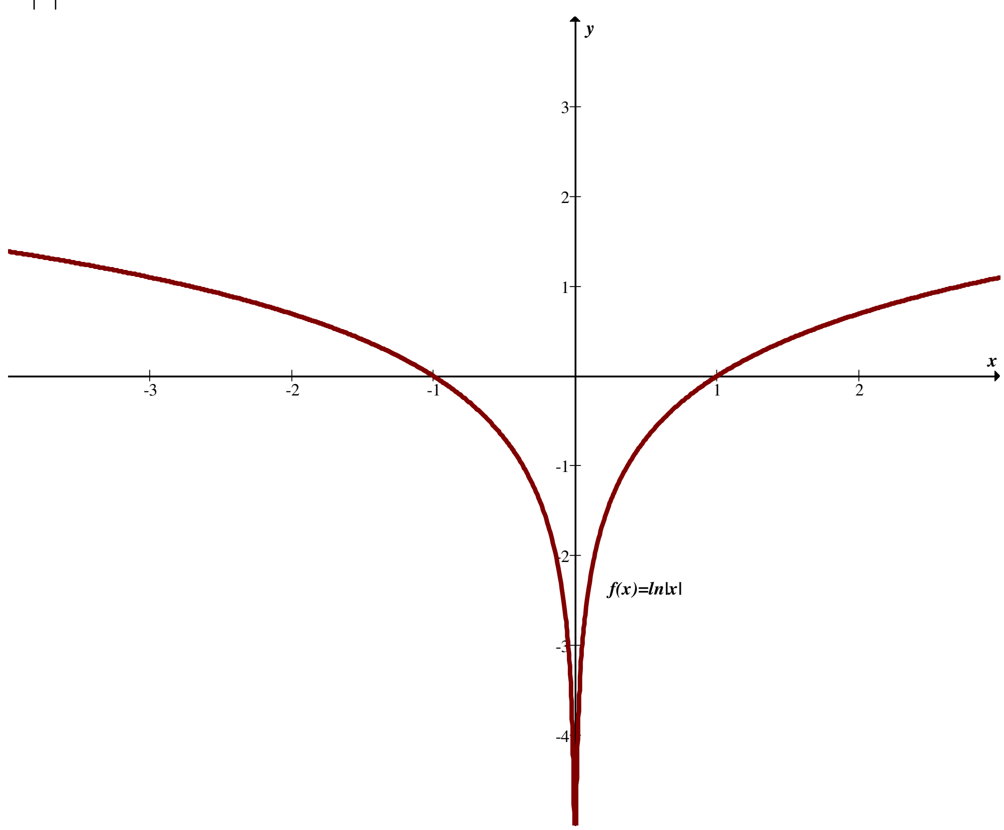
$g[f(a)]=g[\log a]=(\log a)^3$

25. Construir o gráfico das seguintes funções logarítmicas.

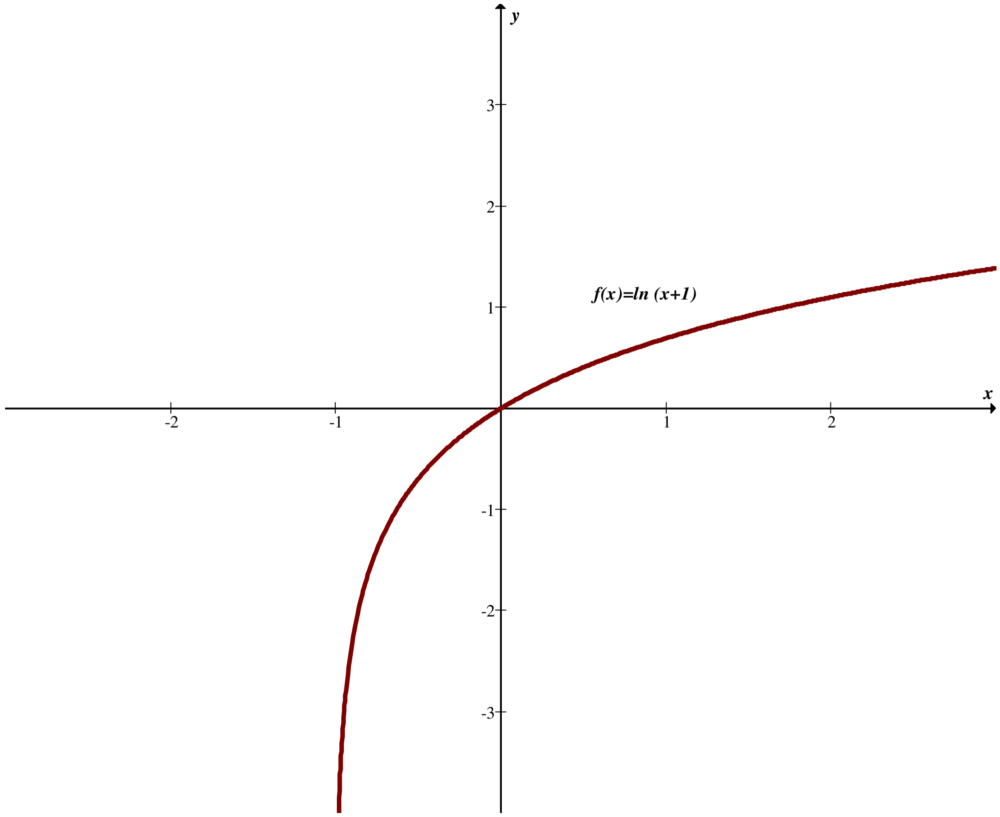
a) $y=\ln(-x)$



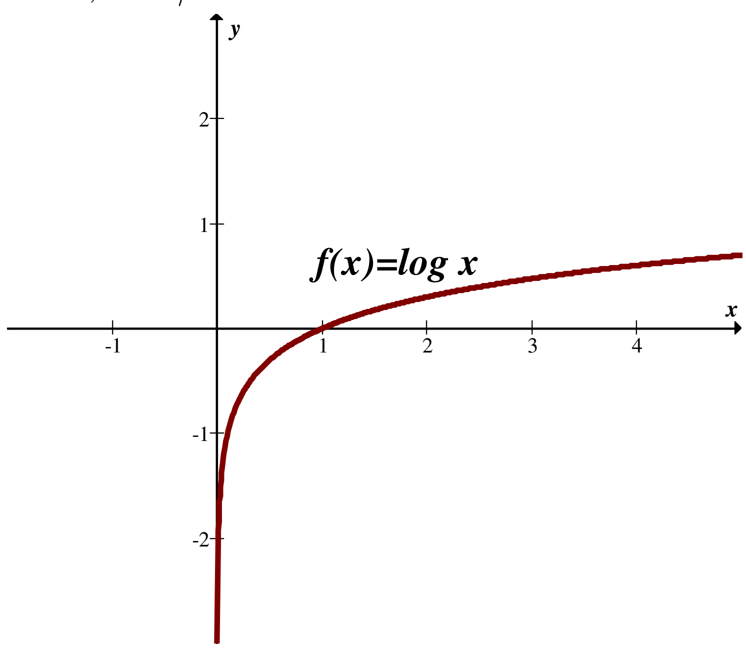
b) $y = \ln|x|$

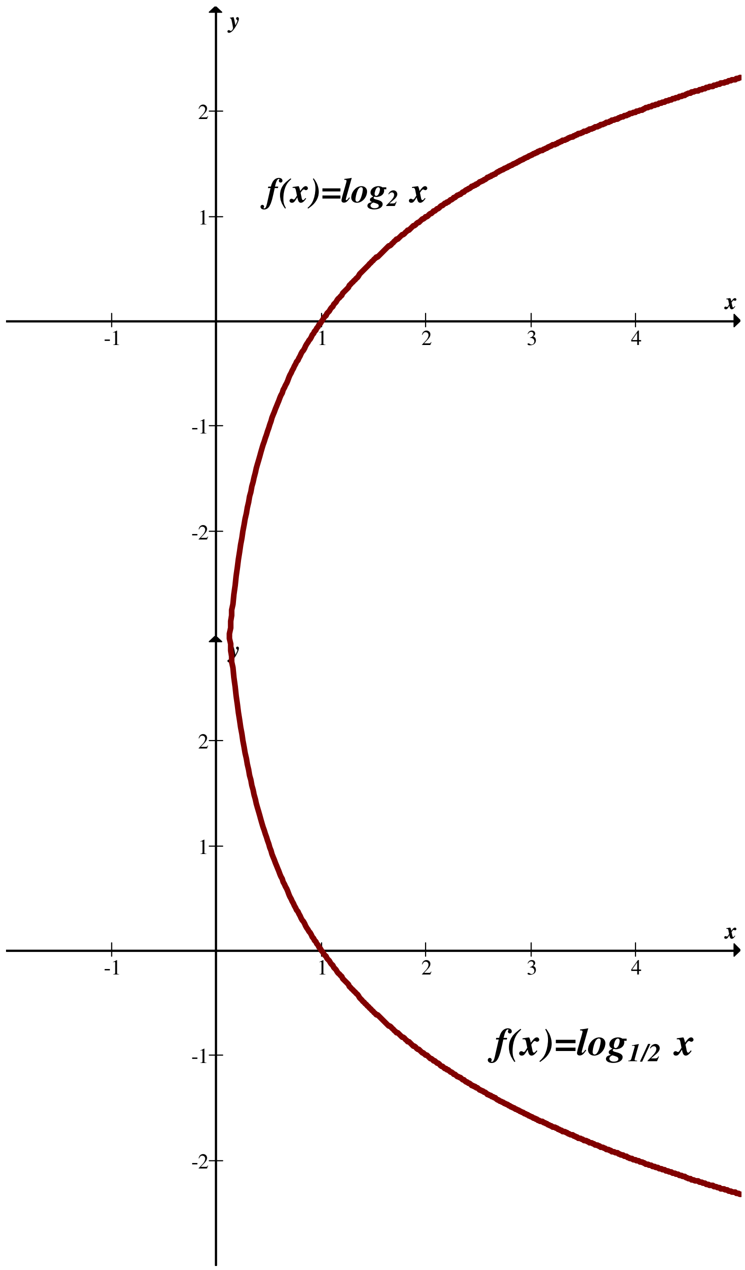


c) $y = \ln(x+1)$

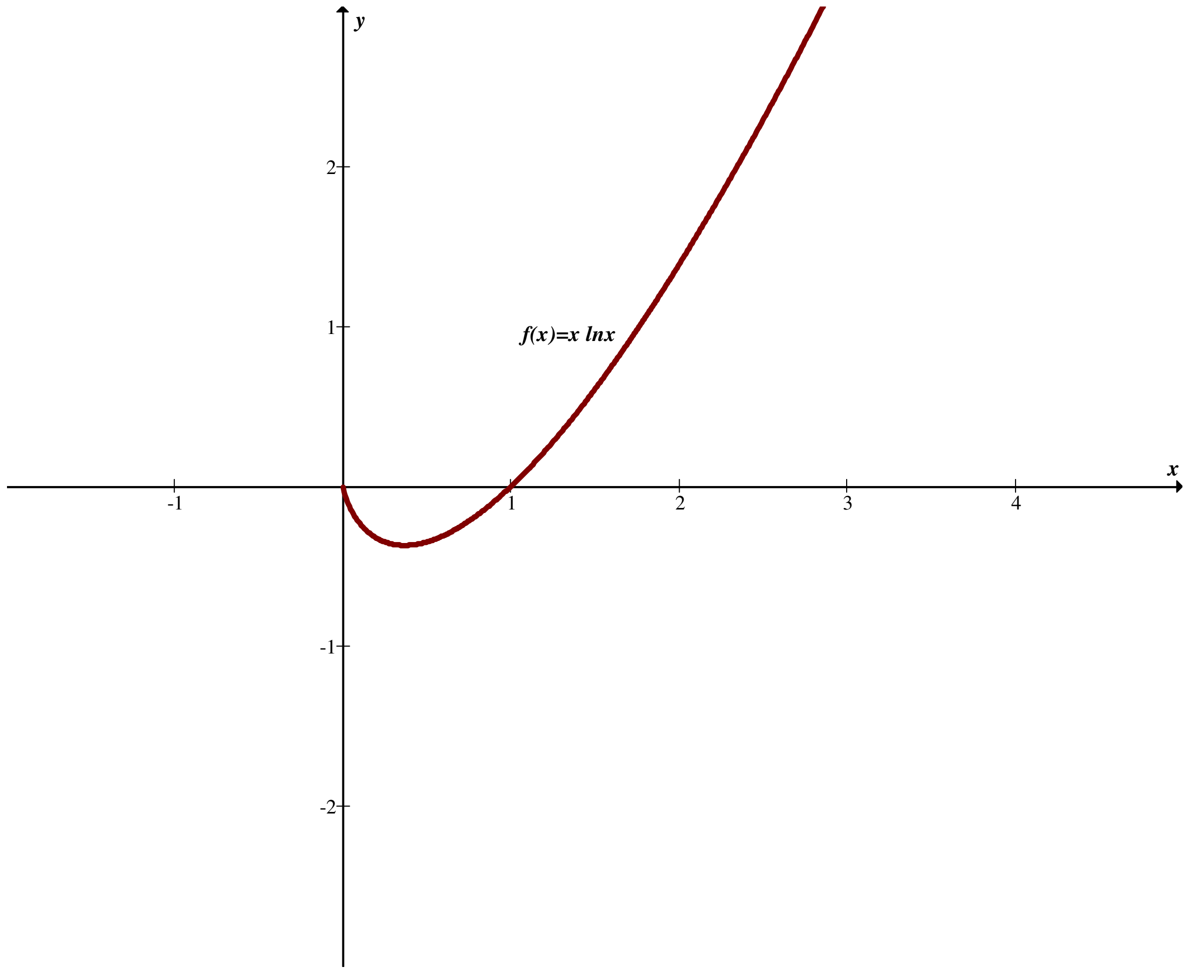


d) $y = \log_a x$ se $a = 10$, 2 e $1/2$





e) $y = x \ln x$



26. Se $f(x) = arc\ tg\ x$ prove que $f(x) + f(y) = f\left(\dfrac{x+y}{1-xy}\right)$

Temos que:

$f(x) = arc\ tg\ x$

$f(y) = arc\ tg\ y$

$f\left(\dfrac{x+y}{1-xy}\right) = arc\ tg\left(\dfrac{x+y}{1-xy}\right)$

Portanto,

$x = tg\ f(x)$

$y = tg\ f(y)$

$\dfrac{x+y}{1-xy} = tg\ f\left(\dfrac{x+y}{1-xy}\right)$

Usando a fórmula trigonométrica $tg(a+b)=\dfrac{tg\ a+tg\ b}{1-tg\ a\,.\,tg\ b}$, vem

$$tg\big(f(x)+f(y)\big)=\frac{tg\ f(x)+tg\ f(y)}{1-tg\ f(x)\,.\,tg\ f(y)}=\frac{x+y}{1-xy}\ .$$

Portanto, $f(x)+f(y)=arc\,tg\,\dfrac{x+y}{1-xy}=f\left(\dfrac{x+y}{1-xy}\right)$.

27. Prove que $arc\ tg\ a-arc\cot g\ b=arc\ tg\ b-arc\cot g\ a$.

Por definição temos que:

$$arc\cot g\ a=\frac{\pi}{2}-arc\,tg\ a \qquad (1)$$

$$arc\cot gb=\frac{\pi}{2}-arc\,tg\,b \qquad (2)$$

Fazendo a subtração (1) –(2) temos:

$$arc\cot g\ a-arc\cot g\ b=\frac{\pi}{2}-arc\,tg\ a-\left(\frac{\pi}{2}-arc\,tg\,b\right)=arc\ tg\ b-arc\ tg\ a\ .$$

Portanto,

$arc\ tg\ a-arc\cot g\ b=arc\ tg\ b-arc\cot g\ a$.

28. Dado $f(\theta)=tg\ \theta$. Verifique a igualdade.

$$f(2\theta)=\frac{2f(\theta)}{1-[f(\theta)]^2}$$

Temos que mostrar que:

$$tg\ 2\theta=\frac{2tg\ \theta}{1-[tg\ \theta]^2}\ .$$

Vamos considerar:

$$tg(a+b)=\frac{sen(a+b)}{\cos(a+b)}=\frac{sen\ a\,.\cos b+\cos a\,.\,sen\ b}{\cos a\,.\cos b-sen\ a\,.\,sen\ b}$$

$$=\frac{\dfrac{sen\ a}{\cos a}+\dfrac{sen\ b}{\cos b}}{1-\dfrac{sen\ a}{\cos a}\cdot\dfrac{sen\ b}{\cos b}}=\frac{tg\ a+tg\ b}{1-tg\ a\,.\,tg\ b}$$

Fazendo $a=b=\theta$ vem:

$$tg\ 2\theta=\frac{2tg\ \theta}{1-[tg\ \theta]^2}.$$

29. Seja $f(x)=arc\cos(\log_{10} x)$.

Calcular.

$$f(1/10)=arc\cos(\log_{10} 1/10)$$
$$=arc\cos(-1)$$
$$=\pi$$

ou $n\pi$ para n inteiro impar.

$$f(1)=arc\cos(\log_{10} 1)$$
$$=arc\cos 0$$
$$=\frac{\pi}{2}+k\pi$$

com k inteiro.

$$f(10)=arc\cos(\log_{10} 10)$$
$$=arc\cos 1$$
$$=n\pi,\ n \text{ inteiro par ou } 2n\pi,\ n\in \mathbb{Z}.$$

30. Determinar o domínio das seguintes funções.

a) $y=arc\cos\dfrac{2x}{1+x}$

Temos que:

$$-1\leq\frac{2x}{1+x}\leq 1$$

Resolvendo esta desigualdade temos $[-1/3, 1]$.

b) $y = arc\ sen\left(\log_{10} {}^{x}\!/_{10}\right)$

Temos que:

$$\frac{x}{10} > 0$$
$$x > 0$$

e

$$-1 \le \log_{10}\ x/10 \le 1$$
$$10^{-1} \le \frac{x}{10} \le 10^{-1}$$
$$1 \le x \le 100$$

c) $y = \sqrt{sen\ 2x}$

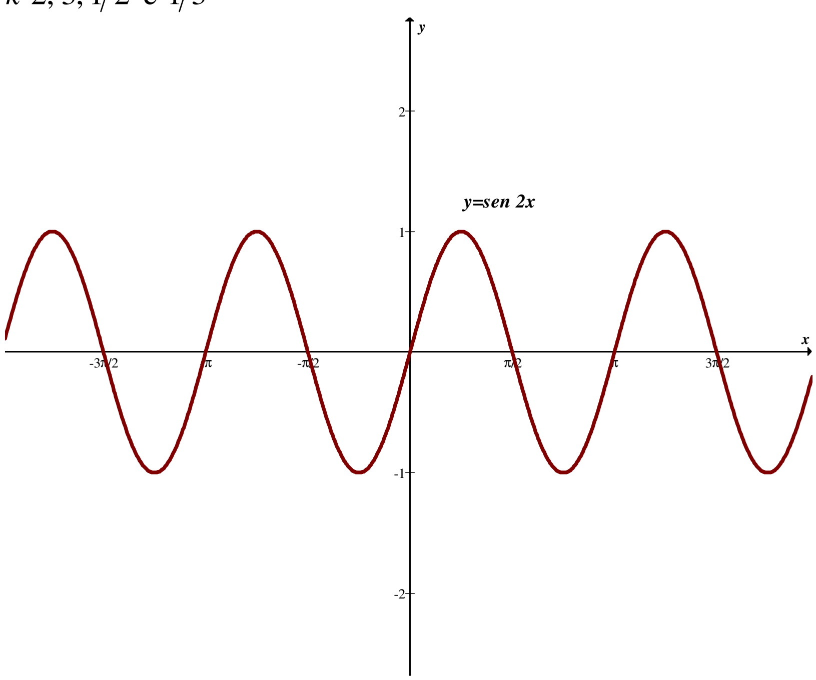
$sen\ 2x \ge 0$

Assim,

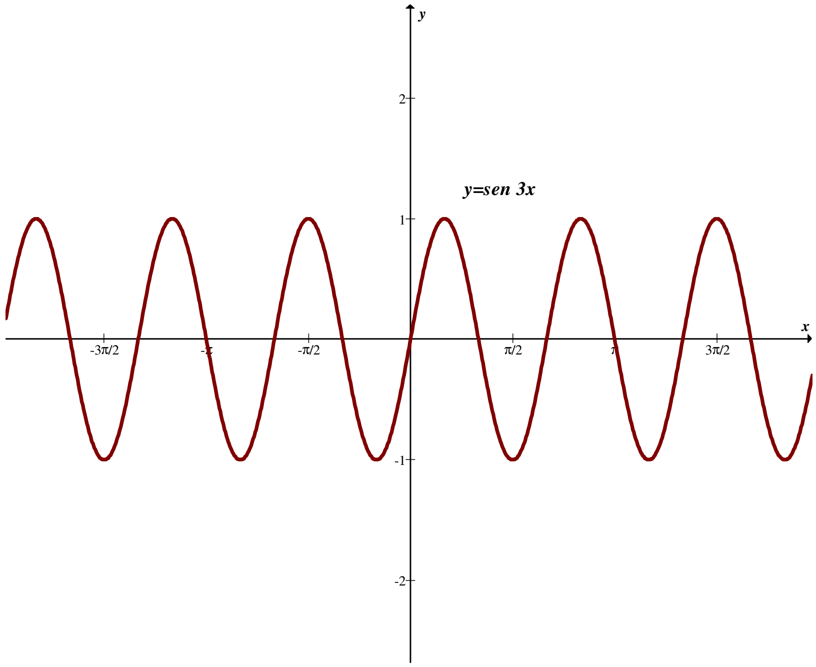
$$x \in \ldots[-\pi, -\pi/2] \cup [0, \pi/2] \cup [\pi, 3\,\pi/2]\ldots$$
$$D(f) = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} [n\pi, n\pi + \pi/2]$$

31. Construir o gráfico das seguintes funções trigonométricas. Verificar se são periódicas e, em caso afirmativo, determinar o período.

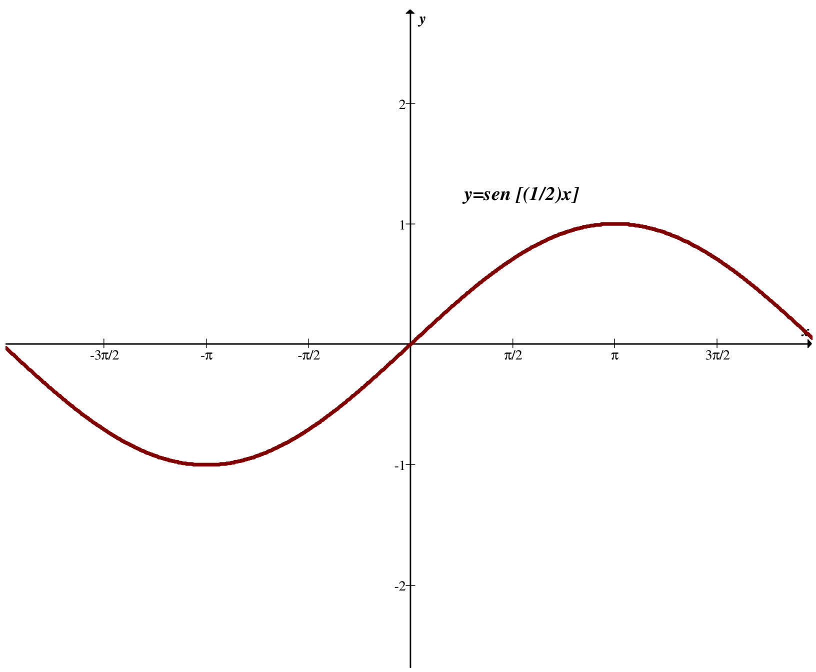
a) $y = sen\ kx,\ k\ 2, 3, 1/2\ \text{ e }\ 1/3$



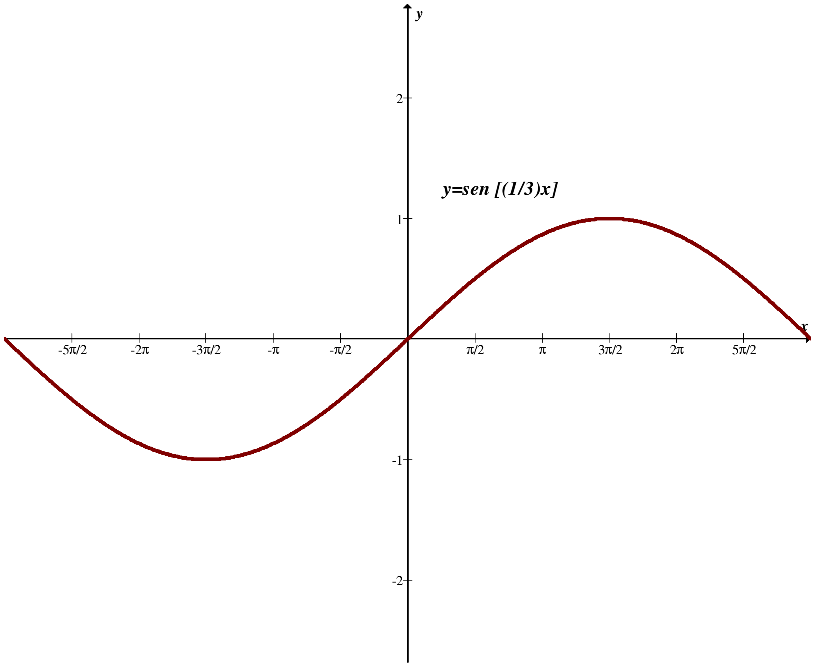
Periódica de período igual a π



Periódica de período igual a $\frac{2\pi}{3}$.

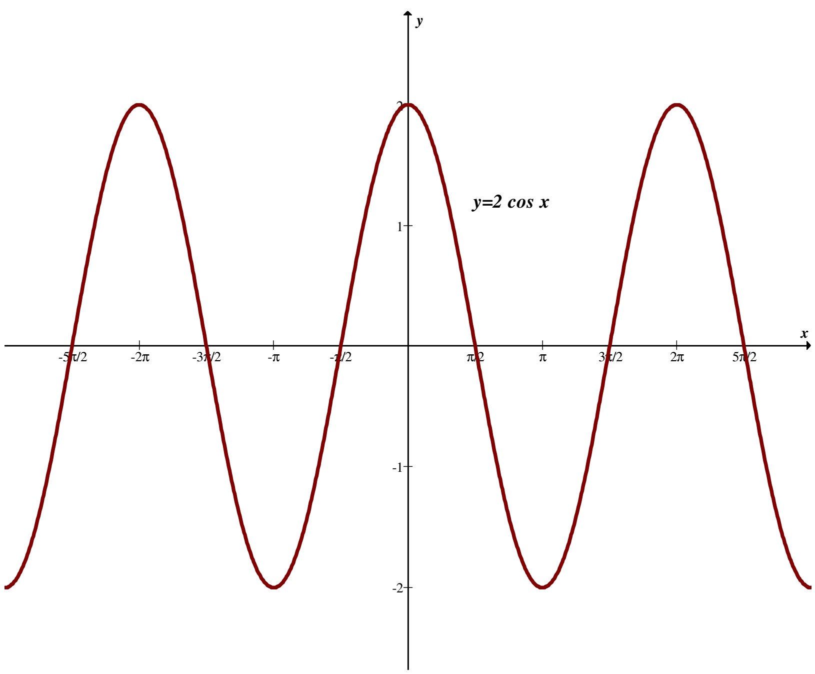


Periódica de período igual a 4π.

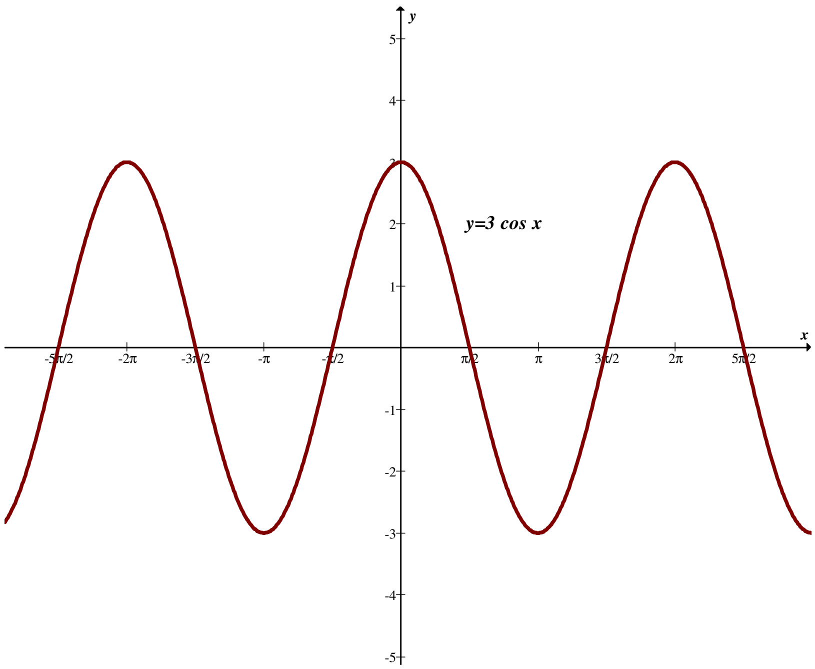


Periódica de período igual a 6π .

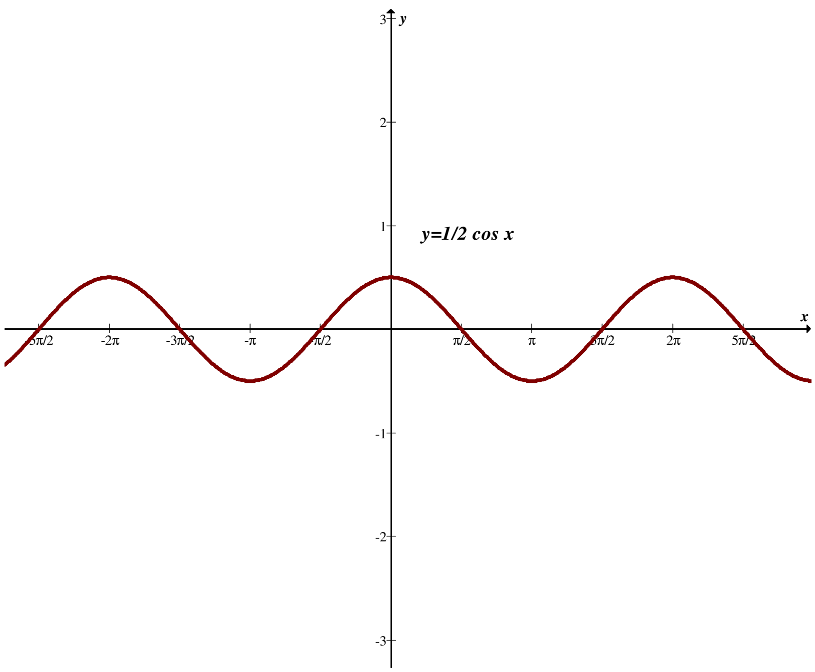
b) $y = k\,\cos\,x$ $\qquad k = 2, 3, 1/2, 1/3$ e -1



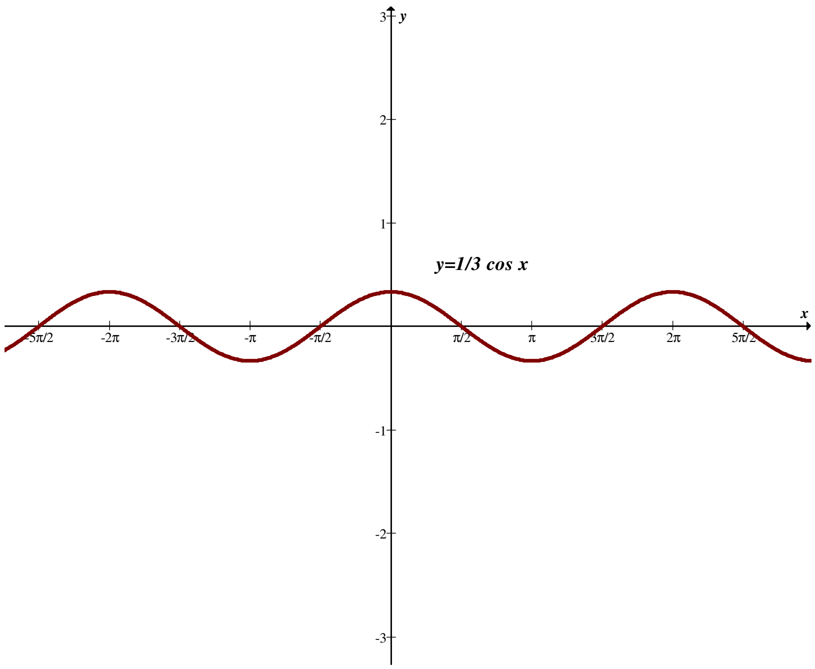
Periódica de período igual a 2π .



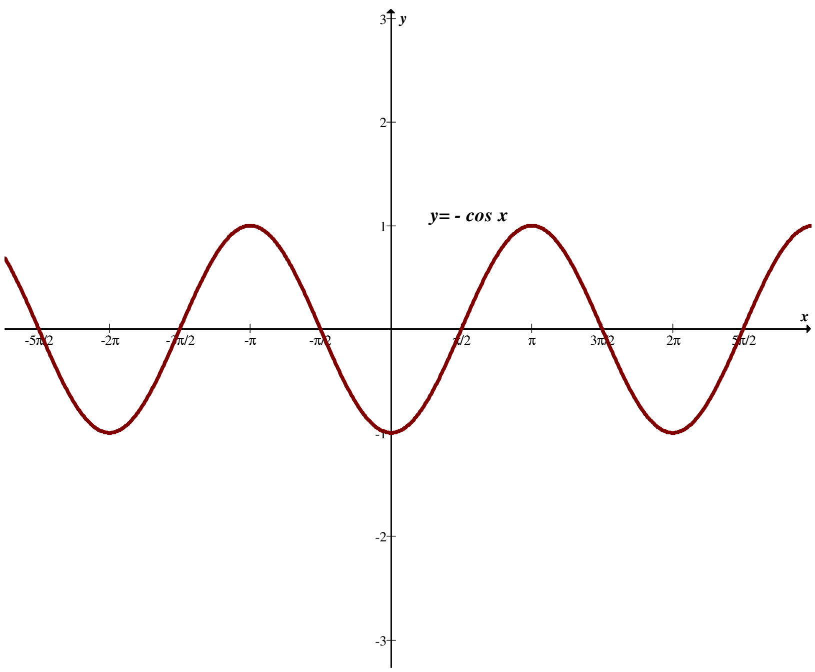
Periódica de período igual a 2π



Periódica de período igual a 2π .

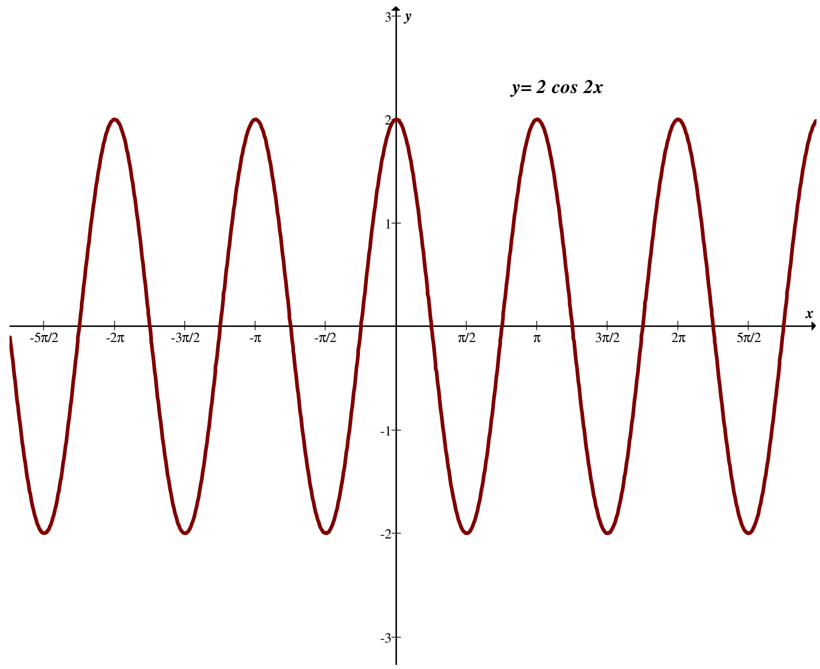


Periódica de período igual a 2π .

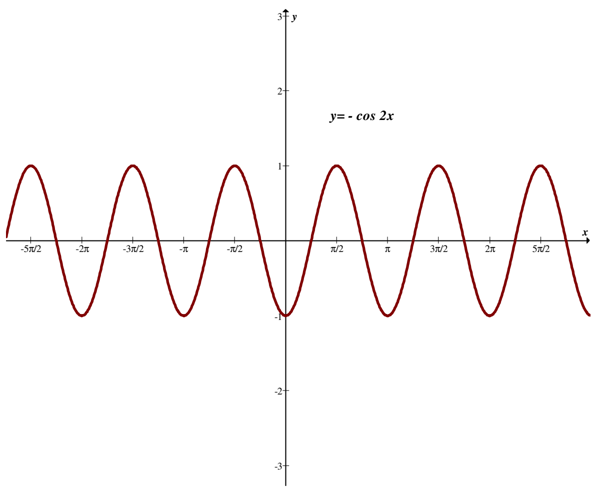


Periódica de período igual a 2π .

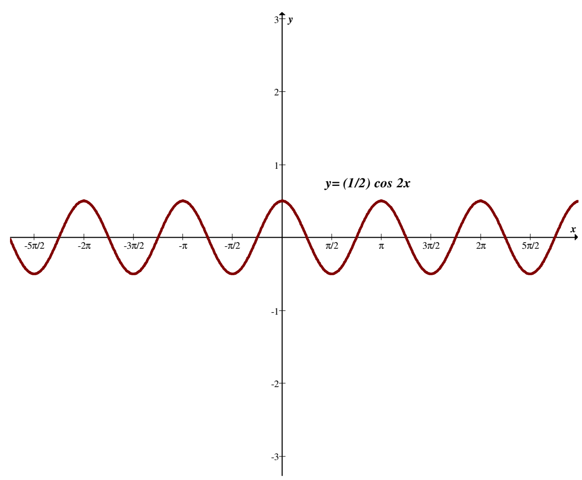
c) $y = k \cos 2x$



Periódica de período igual a π.

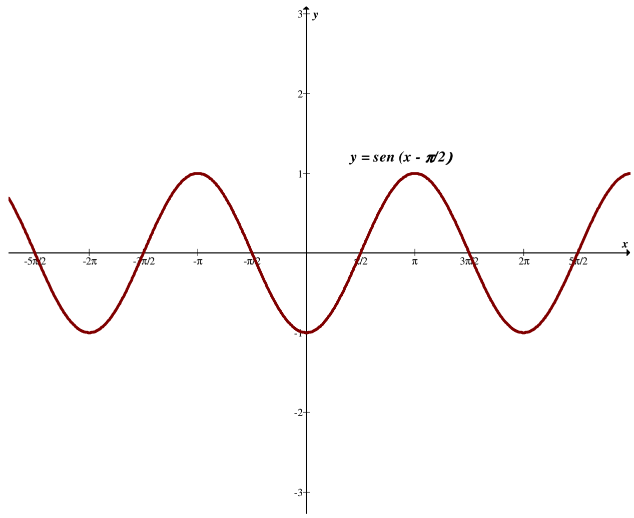


Periódica de período igual a π.



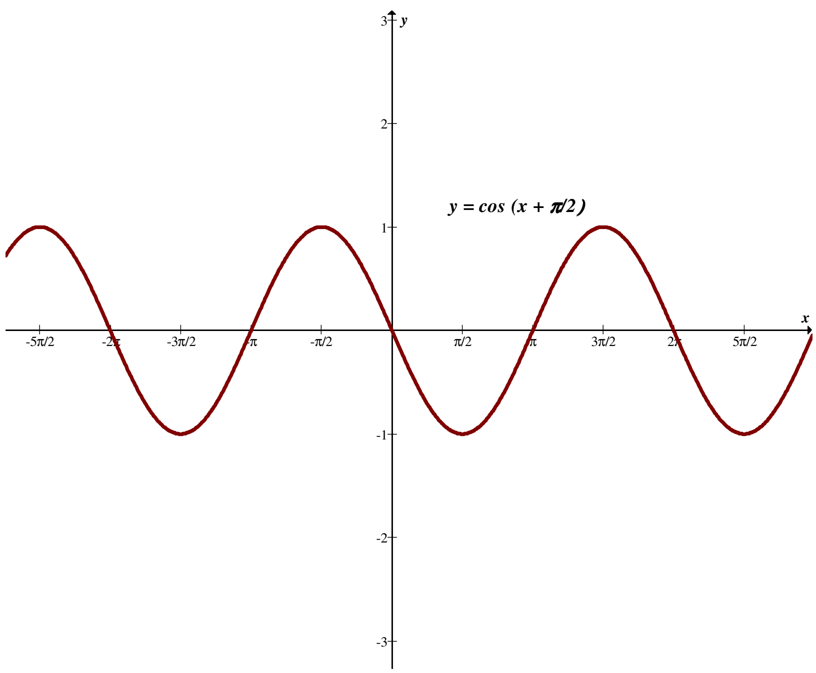
Periódica de período igual a π.

d) $y = sen(x - \pi/2)$



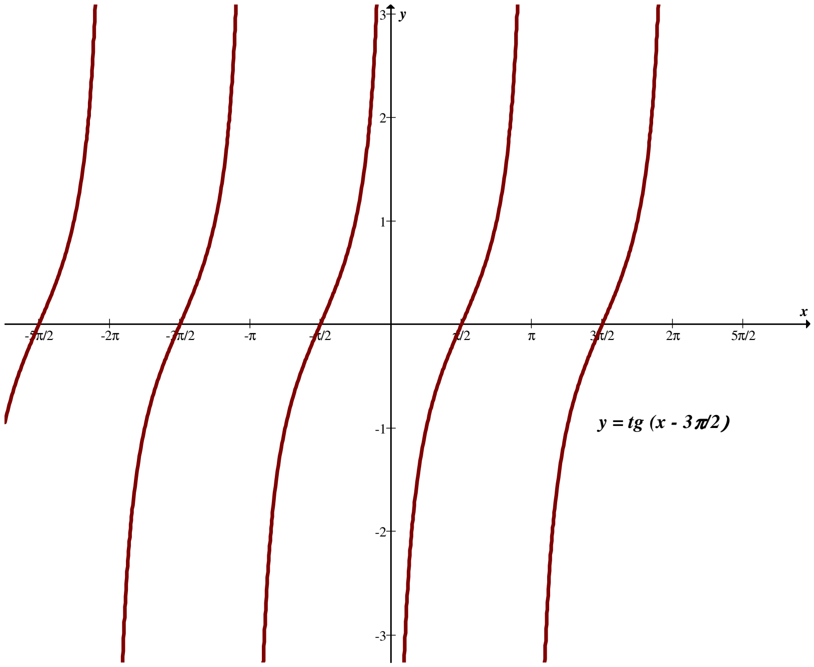
Periódica de período igual a 2π .

e) $y = \cos\left(x + \pi/2\right)$



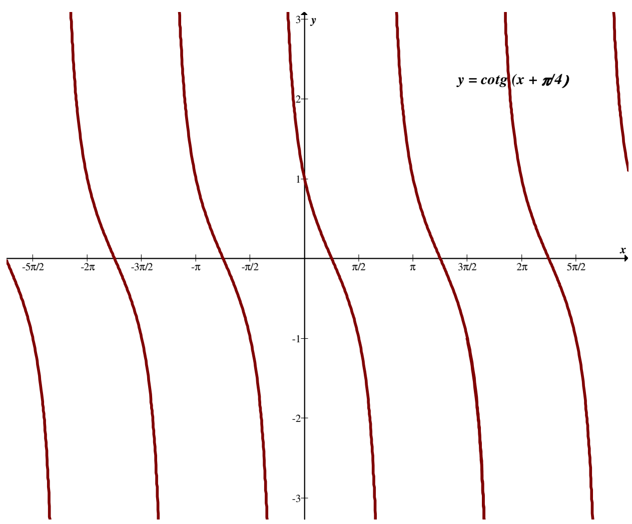
Periódica de período igual a 2π .

f) $y = tg\ \left(x - 3\pi/2\right)$



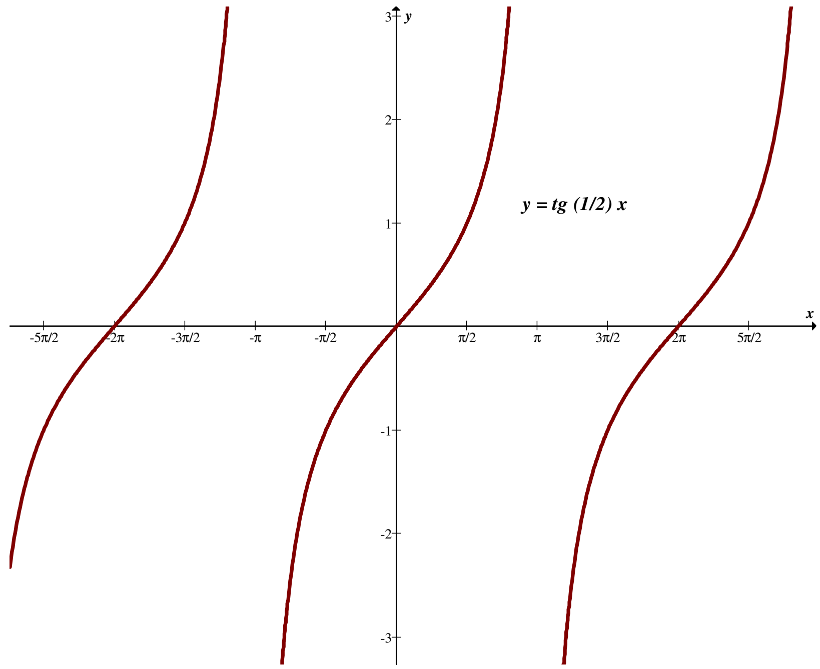
Periódica de período igual a π.

g) $y = \cot g\ (x + \pi/4)$



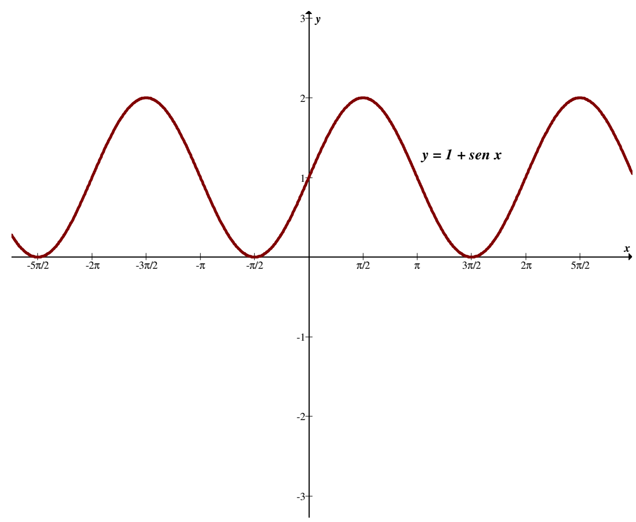
Periódica de período igual a π.

h) $y = tg\,\dfrac{1}{2}\,x$



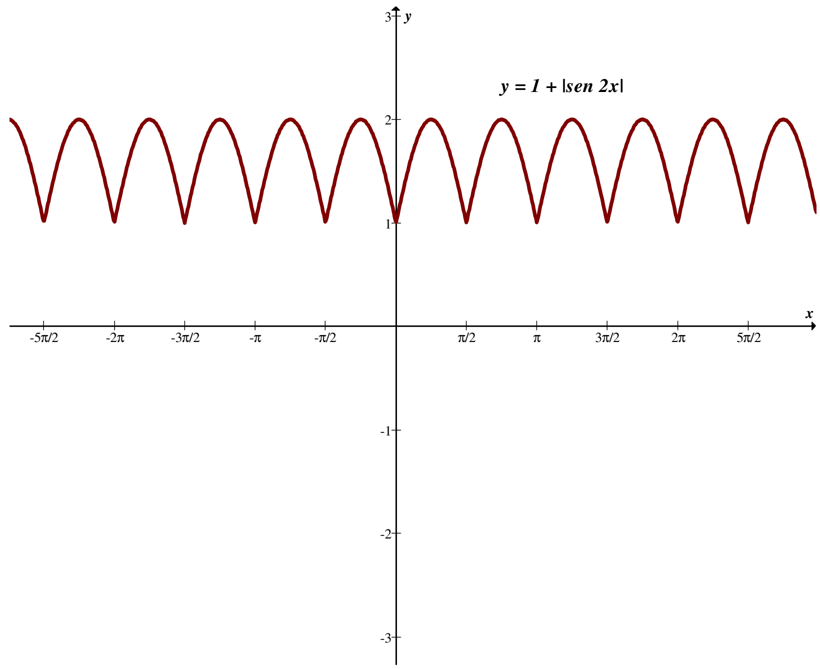
Periódica de período igual a 2π .

i) $y = 1 + sen\ x$



Periódica de período igual a 2π .

j) $y = 1 + |sen\ 2x|$



Periódica de período igual a $\pi/2$.

32. Dada a função $f(x) = 2\ sen\ hx - 3\ tg\ h\ x$, calcule $f(2)$, $f(-1)$ e $f(0)$

$$
\begin{aligned}
f(2) &= 2\ sen\ h\ 2 - 3\ tg\ h\ 2 \\
&= 2\left(\frac{e^2 - e^{-2}}{2}\right) - 3.\left(\frac{e^2 - e^{-2}}{e^2 + e^{-2}}\right) \\
&= \frac{\left(e^2 - e^{-2}\right)\left(e^2 + e^{-2}\right) - 3\left(e^2 - e^{-2}\right)}{e^2 + e^{-2}} \\
&= \frac{e^4 + 1 - 1 - e^{-4} - 3e^2 + 3e^{-2}}{e^2 + e^{-2}} \\
&= \frac{e^4 - e^{-4} - 3e^2 + 3e^{-2}}{e^2 + e^{-2}}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
f(-1) &= 2\ sen\ h\ (-1) - 3\ tg\ h\ (-1) \\
&= 2\left(\frac{e^{-1} - e^{+1}}{2}\right) - 3.\left(\frac{e^{-1} - e^{1}}{e^{-1} + e^{1}}\right) \\
&= \frac{\left(e^{-1} - e\right)\left(e^{-1} + e\right) - 3\ e^{-1} + 3e}{e^{-1} + e} \\
&= \frac{e^{-2} - e^2 - 3e^{-1} + 3e}{e^{-1} + e}
\end{aligned}
$$

$$f(0) = 2\ sen\ h\ 0 - 3\ tg\ h\ 0$$
$$= 2\,\frac{e^0 - e^0}{2} - 3\,.\,\frac{e^0 - e^0}{e^0 + e^0}$$
$$= 0 - 0$$
$$= 0$$

33. Prove as identidades.

(a)

$$1 - tg\ h^2\ u = \sec h^2\ u$$

$$1 - \left(\frac{e^u - e^{-u}}{e^u + e^{-u}}\right)^2 = 1 - \frac{(e^u - e^{-u})^2}{(e^u + e^{-u})^2}$$
$$= \frac{(e^u + e^{-u})^2 - (e^u - e^{-u})^2}{(e^u + e^{-u})^2}$$
$$= \frac{e^{2u} + 2e^0 + e^{-2u} - e^{2u} + 2 - e^{-2u}}{(e^u + e^{-u})^2}$$
$$= \frac{4}{(e^u + e^{-u})^2} = \left(\frac{2}{e^u + e^{-u}}\right)^2 = \sec h^2\ u$$

(b)

$$1 - \cot g\ h^2\ u = -\cos\sec h^2\ u$$

$$1 - \frac{(e^u + e^{-u})^2}{(e^u - e^{-u})^2} = \frac{e^{2u} - 2 + e^{-2u} + e^{2u} - 2 - e^{-2u}}{(e^u - e^{-u})^2}$$
$$= \frac{-4}{(e^u - e^{-u})^2} = -\left(\frac{2}{e^u - e^{-u}}\right)^2 = -\cos\sec h^2\ u$$

34. Defina uma função inversa para $y = \cos h\ x$, para $x \leq 0$. Esboce o gráfico.

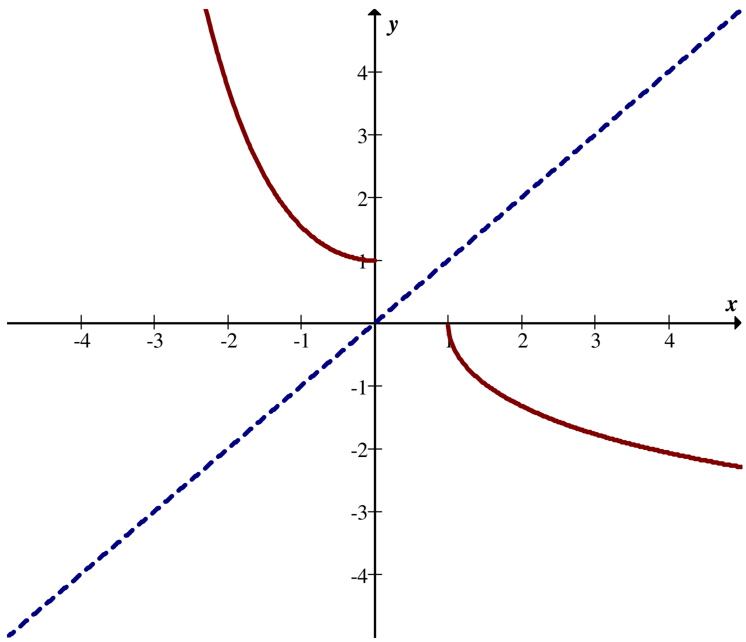
Temos $f : (-\infty, 0) \to [1, +\infty)$, $y = f(x) = \cosh x$. A sua inversa será uma função $f^{-1} : [1, +\infty) \to (-\infty, 0]$.

Usando $x = \cosh y = \dfrac{e^y + e^{-y}}{2}$, podemos escrever $e^y - 2x + e^{-y} = 0$ ou $e^{2y} - 2xe^y + 1 = 0$.

Resolvendo esta equação obtemos

$e^y = \dfrac{2x \pm \sqrt{4x^2 - 4}}{2} = x \pm \sqrt{x^2 - 1}$.

Como $y \in (-\infty, 0)$, temos $0 < e^y < 1$. Portanto, usamos o sinal negativo, ou seja, $e^y = x - \sqrt{x^2 - 1}$. Tomando o logaritmo natural, vem $y = \ln(x - \sqrt{x^2 - 1})$. A figura que segue mostra o gráfico da função e da sua inversa no intervalo considerado.



35. Mostre a validade das expressões:

$a)$ $\arg\cos h\ x = \ln\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right), \quad x \geq 1,$

Seja $y = \arg\cos h\ x, \quad x \geq 1$. Por definição temos que $x = \cos h\ y, \quad y \geq 0$ e

$x = \dfrac{e^y + e^{-y}}{2}, \quad y \geq 0$

Podemos reescrever a última expressão como:

$$2x = e^y + e^{-y}$$

$$2x = \frac{e^{2y} + 1}{e^y}$$

$e^{2y} - 2xe^y + 1 = 0$

Aplicando a fórmula de Bhaskara vem:

$$e^y = \frac{2x \pm \sqrt{4x^2 - 4}}{2} = x \pm \sqrt{x^2 - 1}, \quad y \geq 0 \qquad (1)$$

Sabemos que $y \geq 0$ e $x \geq 1$, logo, $e^y \geq 1$
Quando

$x = 1 \quad \Rightarrow \quad x + \sqrt{x^2 - 1} = 1$

$x > 1 \quad \Rightarrow \quad x - \sqrt{x^2 - 1} < 1$

Portanto podemos desprezar o sinal $(-)$ em (1) e $arc \cos h\ x = \ln\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right), \quad x \geq 1$

b) $\arg tg\ h\ x = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) \qquad -1 < x < 1$

Pela definição

$y = \arg tg\ h\ x \Leftrightarrow x = tg\ h\ y$.
Temos,

$$x = \frac{e^y - e^{-y}}{e^y + e^{-y}}$$

$$x\left(e^y + e^{-y}\right) = e^y - e^{-y}$$

$$x\left(e^y + e^{-y}\right) = e^y - e^{-y}$$

$$xe^{2y} + x = e^{2y} - 1$$

$$e^{2y} - xe^{2y} = 1 + x$$

$$e^{2y}(1-x) = 1 + x$$

$$e^{2y} = \frac{1+x}{1-x}$$

$$2y = \ln\frac{1+x}{1-x}$$

$$y = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$$

com $-1 < x < 1$.

c) $\arg \sec h\ x = \ln\left(\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}\right),\ 0 < x \leq 1$.

Para $0 < x \leq 1$, $y = \arg \sec h\ x \Leftrightarrow x = \sec hy$.
Temos,

$$x = \sec h\ y$$
$$x = \frac{2}{e^{y} + e^{-y}}$$
$$xe^{y} + xe^{-y} = 2$$
$$xe^{2y} + x = 2e^{y}$$
$$xe^{2y} - 2e^{y} + x = 0$$
$$e^{y} = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4x^2}}{2x}$$
$$= \frac{2 \pm 2\sqrt{1 - x^2}}{2x}$$
$$= \frac{1 \pm \sqrt{1 - x^2}}{x}$$

Como no exercício anterior consideramos só o sinal $+$. Tomando o logaritmo, vem

$$y = \ln\left(\frac{1 + \sqrt{1 - x^2}}{x}\right), \quad 0 < x \le 1 .$$

36. Sendo $f(x) = \cos h\ x$, mostrar que $f\left[\ln\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right)\right] = x$.

$$f\left[\ln\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right)\right] = \cos h\left[\ln\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right)\right]$$
$$= \frac{e^{\ln\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right)} + e^{-\ln\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right)}}{2}$$
$$= \frac{x + \sqrt{x^2 - 1} + \left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right)^{-1}}{2}$$
$$= \left(x + \sqrt{x^2 - 1} + \frac{1}{x + \sqrt{x^2 - 1}}\right) \times \frac{1}{2}$$
$$= \frac{x^2 + 2x\sqrt{x^2 - 1} + x^2 - 1 + 1}{x + \sqrt{x^2 - 1}} \times \frac{1}{2}$$

$$= \frac{2x^2 + 2x\sqrt{x^2-1}}{x+\sqrt{x^2-1}} \times \frac{1}{2}$$
$$= \frac{2x\left(x\sqrt{x^2-1}\right)}{x+\sqrt{x^2-1}} \times \frac{1}{2}$$
$$= x$$

37. Mostre que as funções *senh x, tgh x, cotgh x e cosech x* são ímpares.

(i) $f(x) = senhx = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$

e

$f(-x) = senh(-x) = \dfrac{e^{-x} - e^x}{2} = -\dfrac{e^x - e^{-x}}{2} = -f(x)$.

(ii) $f(x) = tghx = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$

e

$f(-x) = tgh(-x) = \dfrac{e^{-x} - e^x}{e^{-x} + e^x} = -\dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = -f(x)$.

(iii) $f(x) = \cot ghx = \dfrac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$

e

$f(-x) = \cot gh(-x) = \dfrac{e^{-x} + e^x}{e^{-x} - e^x} = -\dfrac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} = -f(x)$.

(iv) $f(x) = \cos echx = \dfrac{2}{e^x - e^{-x}}$

e

$f(-x) = \cos ech(-x) = \dfrac{2}{e^{-x} - e^x} = -\dfrac{2}{e^x - e^{-x}} = -f(x)$.

38. Mostre que as funções *cosh x* e *sech x* são pares

(i) $f(x) = \cosh x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$

e

$f(-x) = \cosh(-x) = \dfrac{e^{-x} + e^x}{2} = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2} = f(x)$.

(ii) $f(x) = \sec hx = \dfrac{2}{e^{x} + e^{-x}}$

e

$$f(-x) = \sec h(-x) = \frac{2}{e^{-x} + e^{x}} = \frac{2}{e^{x} + e^{-x}} = f(x).$$

39. Analisar a função $f(x) = 24x - 3x^2$ e verificar a possibilidade de representar uma função receita total. Em caso afirmativo identifique a função demanda e responda:
(a) Qual a quantidade demandada quando o preço unitário é R$ 5,00?
(b) Qual é o preço do produto quando a receita é máxima?

A função receita é dada por $R = p \cdot q$ sendo p = preço e q = demanda. Supondo que x = preço, a função demanda é dada por $q = 24 - 3x$ sendo $f(x) = 24x - 3x^2$ a função receita total.

a)

$$p = 5 \quad \Rightarrow \quad q = 24 - 3 \cdot 5$$
$$q = 24 - 15$$
$$q = 9$$

b)

A função receita total é uma função do segundo grau e, portanto, o seu valor máximo está no seu vértice em x=4, ou seja, o preço de R$ 4,00.

40. As funções de demanda e oferta de um determinado produto no mercado são dadas por $q_d = 15 - 4p$ e $q_o = 6p - 1$, respectivamente.

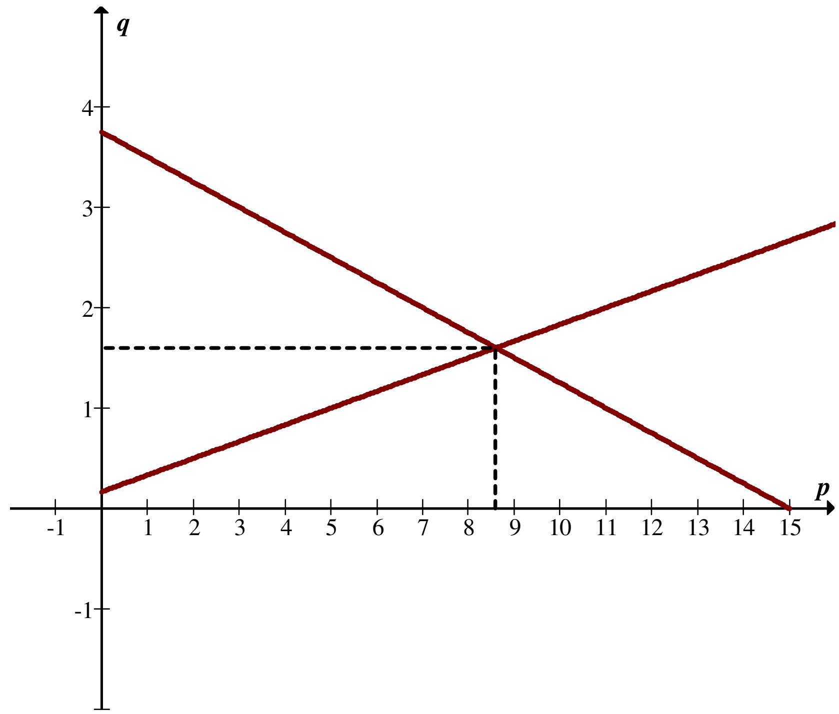
(a) Determine o preço de equilíbrio.
(b) Represente graficamente as funções demanda e oferta, mostrando o ponto de equilíbrio. Esboce os dois gráficos juntos.

a) O preço de equilíbrio é dado por:

$$q_d = q_0$$
$$15 - 4p = 6p - 1$$
$$4p - 6p = -1 - 15$$
$$10p = 16$$
$$p = 1{,}6$$

ou seja $1{,}6$ unidades monetárias.

b) A Figura que segue apresenta o gráfico solicitado.



41. Uma imobiliária cobra uma comissão de 12% do valor da venda de um imóvel mais $R\$25{,}00$ fixo para as despesas de correio e divulgação. Denote por x o valor do imóvel (em reais) e por $f(x)$ o valor cobrado pela imobiliária.

(a) Descreva a função $f(x)$.

(b) Qual o valor recebido pela imobiliária na venda de um imóvel por $R\$185.000{,}00$?

(a) Considerando:

- x = valor do imóvel
- $f(x)$ = valor cobrado pela imobiliária

temos: $f(x)=\dfrac{3}{25}x+25$.

(b) $f(185.000)=\dfrac{3}{25}\cdot 185.000+25=22.225$ ou seja R\$ 22.225,00.

42. O preço de venda de um produto é de $R\$27{,}00$. A venda de 100 unidades dá um lucro de $R\$260{,}00$. Sabendo-se que o custo fixo de produção é de $R\$540{,}00$ e que o custo variável é proporcional ao número de unidades produzidas, determine:

(a) A função receita total.

(b) O custo variável, para uma produção de 2.000 unidades.

(d) A produção necessária para um lucro de $R\$23.460{,}00$.

(a) A função receita é dada por $R(q) = 27 \,.\, q$

(b) Temos que a função lucro é dada por
$L = R(q) - C_t(q)$
sendo que $C_t(q) = 540 + C_v q$. Assim,

$$L = 27q - (540 + C_v q)$$
$$= 27q - C_v q - 540$$

Considerando-se que $L(100) = 260$ vem:

$$260 = 27.100 - C_v \cdot 100 - 540$$
$$100\, C_v = 2700 - 540 - 260$$
$$C_v = 19$$

Assim o custo variável de uma unidade é dado por R$ 19,00 e a função custo variável é dada por $C_v(q) = 19 \,.\, q$. Temos, $C_v(2000) = 19 \,.\, 2000 = 38\,000$, ou seja, R$38.000,00.

(c)

$$L(q) = 8q - 540$$
$$23460 = 8q - 540$$
$$8q = 23460 + 540$$
$$q = \frac{24\,000}{8}$$
$$q = 3\,000$$

(43) Uma indústria comercializa um certo produto e tem uma função custo total, dada por $C(x) = x^2 + 20x + 700$, sendo x o número de unidades produzidas. A função receita total é dada por $R(x) = 200x$. Determine:

(a) O lucro para a venda de 100 unidades.
(b) Em que valor de x acontecerá o lucro máximo?

(a)

$$L(x) = R(x) - C(x)$$
$$= 200x - x^2 - 20x - 700$$
$$= -x^2 + 180x - 700$$

$$L(100) = -10\,000 + 18\,000 - 700$$
$$= 7300$$

ou seja $R\$ \; 7.300{,}00$.

(b) A função lucro é uma função do segundo grau, assim o seu valor máximo encontra-se no seu vértice, ou seja, em x=90.

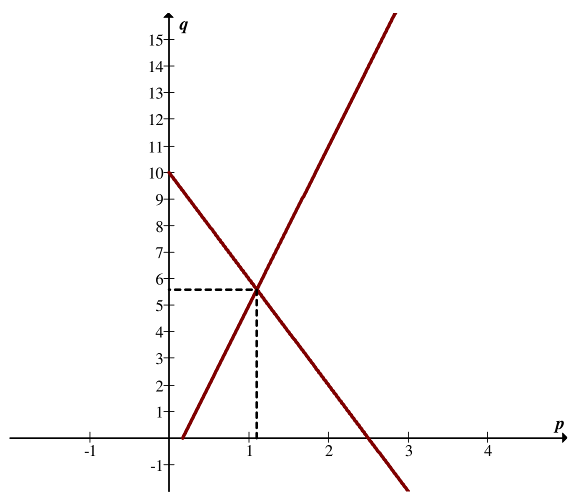
(44) Determinar graficamente a algebricamente o equilíbrio do mercado considerando as seguintes funções de demanda e oferta:

(a) $\begin{cases} Q_d = 10 - 4P \\ Q_s = 6P - 1 \end{cases}$ (b) $\begin{cases} Q_d = 4 - P^2 \\ Q_s = 4P - 1 \end{cases}$

(a) Temos:

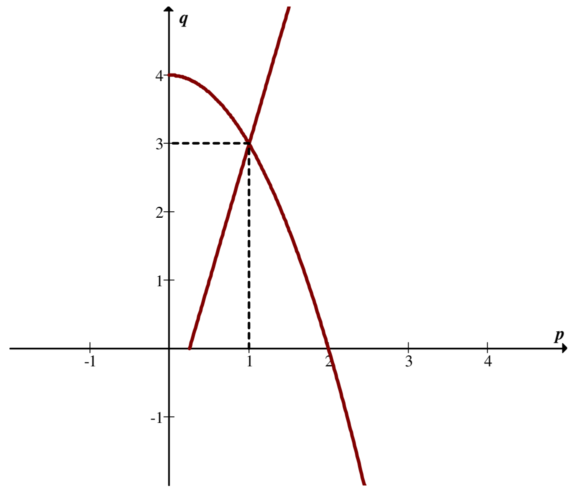
$$10 - 4P = 6P - 1$$
$$11 = 10P$$
$$P = 1{,}1$$

O gráfico que segue apresenta a solução gráfica. Observe que é indiferente para a solução gráfica a posição das variáveis no sistema de eixos.



b)

$$4 - p^2 = 4p - 1$$
$$p^2 + 4p - 5 = 0$$
$$p = \frac{-4 \pm \sqrt{16+20}}{2} = \frac{-4 \pm 6}{2}$$
$$p = 1$$



(45) Uma caixa sem tampa na forma de um paralelepípedo tem um volume de $10cm^3$. O comprimento da base é o dobro da largura. O material da base custa R\$ 2,00 por m^2 ao passo que o material das laterais custa R\$ 0,02 por m^2. Expressar o custo total do material em função da largura da base.

Seja x a largura da base e h a altura da caixa. Temos,

$$V = x \times 2x \times h = 10\ cm^3$$

$$2x^2h = 10$$

$$h = \frac{5}{x^2}$$

$$C_t = 2 \times x \times 2x + 0{,}02\,(2xh + 2 \cdot 2x \cdot h)$$

$$= 4x^2 + 0{,}02 \cdot 6\ xh$$

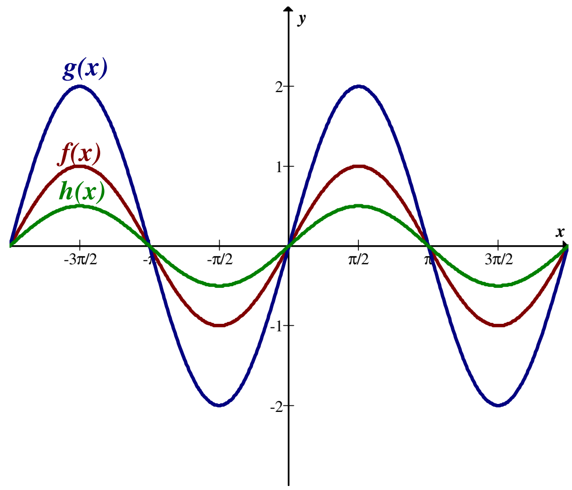
$$= 4x^2 + 0{,}12\ x \cdot \frac{5}{x^2}$$

$$C_t = 4x^2 + \frac{6}{10x}.$$

(46) Traçar o gráfico das funções trigonométricas. Comparar cada conjunto identificando a transformação ocorrida. Identificar domínio, conjunto imagem, máximos e mínimos, crescimento e decrescimento.

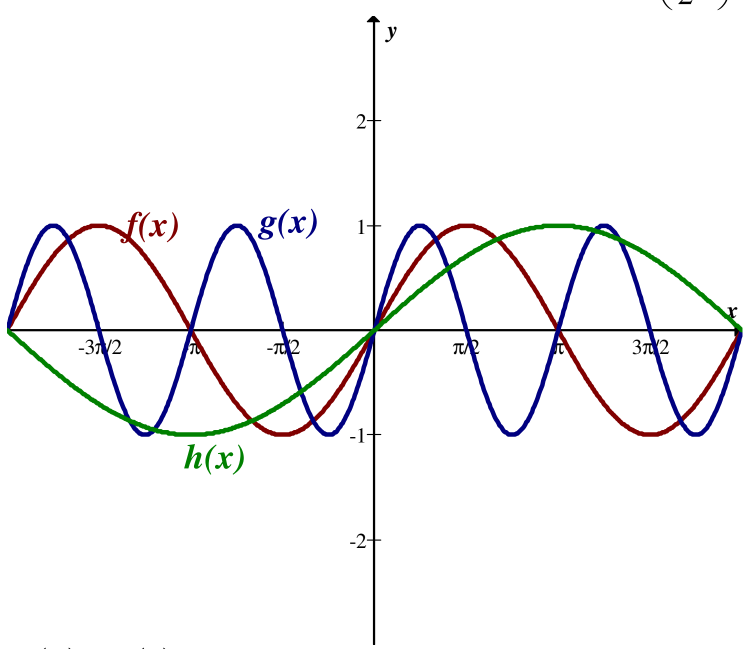
(a) $f(x) = sen\ x$ $\qquad g(x) = 2\ sen\ x$ $\qquad h(x) = \frac{1}{2} sen\ x$

Os gráficos foram traçados no mesmo sistema de eixo para otimizar a visualização.



- $D(f) = D(g) = D(h)$.
- $\operatorname{Im}(f) = [-1, 1]$ $\qquad$ $\operatorname{Im}(g) = [-2, 2]$ $\qquad$ $\operatorname{Im}(h) = \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$.
- As funções assumem valores máximos e mínimos em pontos com x coincidentes.
- Os intervalos de crescimento e decrescimento coincidem.
- De f para g houve uma expansão vertical e de f para h uma contração vertical.

(b) $f(x) = sen\ x$ $\qquad$ $g(x) = sen\ 2x$ $\qquad$ $h(x) = sen\left(\frac{1}{2}x\right)$



- $D(f) = D(g) = D(h)$
- $\operatorname{Im}(f) = \operatorname{Im}(g) = \operatorname{Im}(h)$
- Pontos de máximo:

$$f(x) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi,\ k \in \mathrm{Z}$$

$$g(x) = \frac{\pi}{4} + k\pi,\ k \in \mathrm{Z}$$

$$h(x) = \pi + 4k\pi,\ k \in \mathrm{Z}$$

- Pontos de mínimo:

$$f(x) = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi,\ k \in \mathrm{Z}$$

$$g(x) = \frac{3\pi}{4} + k\pi,\ k \in \mathrm{Z}$$

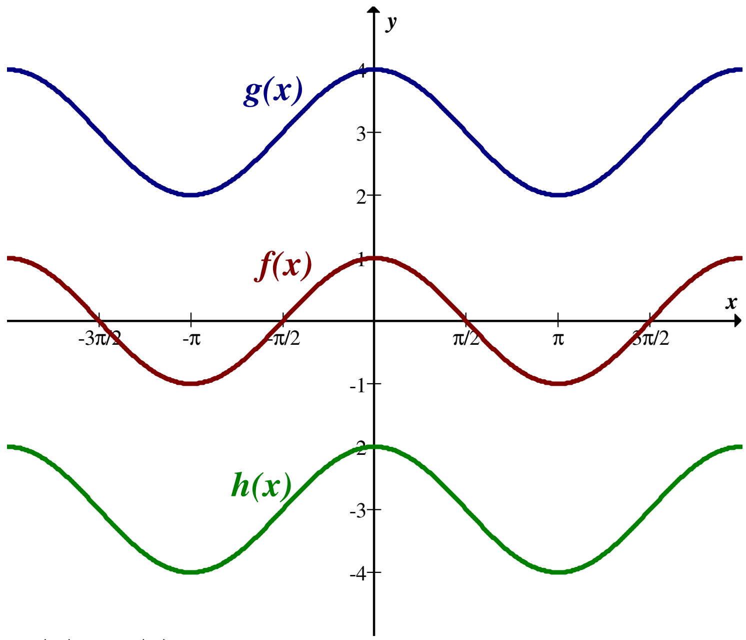
$$h(x) = -\pi + 4k\pi,\ k \in \mathrm{Z}$$

- Intervalos de crescimento e decrescimento
- f : Crescimento em $\left[-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right] k \in \mathrm{Z}$ e decrescimento em $\left[\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{3\pi}{2} + 2k\pi\right] k \in \mathrm{Z}$.

- g : Crescimento em $\left[-\frac{\pi}{4} + k\pi, \frac{\pi}{4} + k\pi\right] k \in \mathrm{Z}$ e decrescimento em $\left[\frac{\pi}{4} + k\pi, \frac{3\pi}{4} + k\pi\right] k \in \mathrm{Z}$.

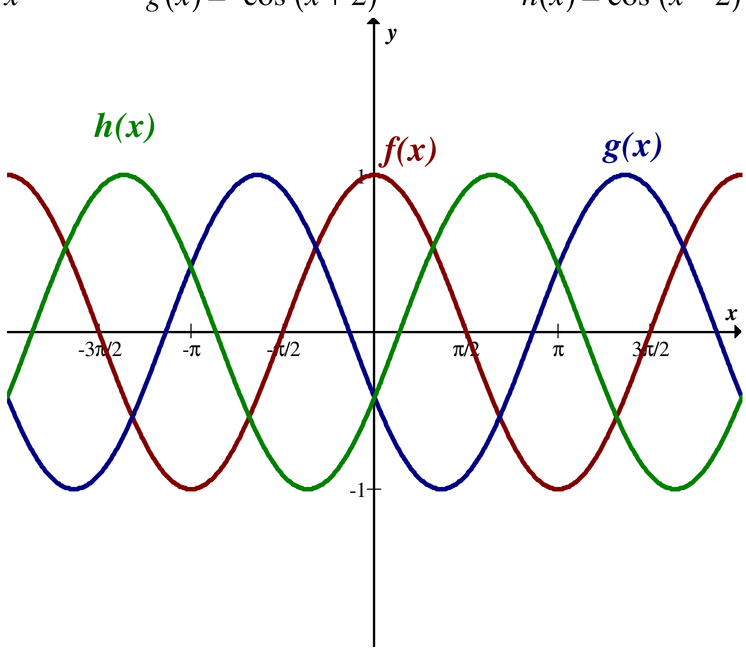
- h: Crescimento em $[-\pi + 4k\pi, \pi + 4k\pi]\, k \in \mathrm{Z}$ decrescimento em $[\pi + 4k\pi, 3\pi + 4k\pi]\, k \in \mathrm{Z}$.

(c) $f(x) = \cos x$ $\qquad$ $g(x) = \cos x + 3$ $\qquad$ $h(x) = \cos x - 3$



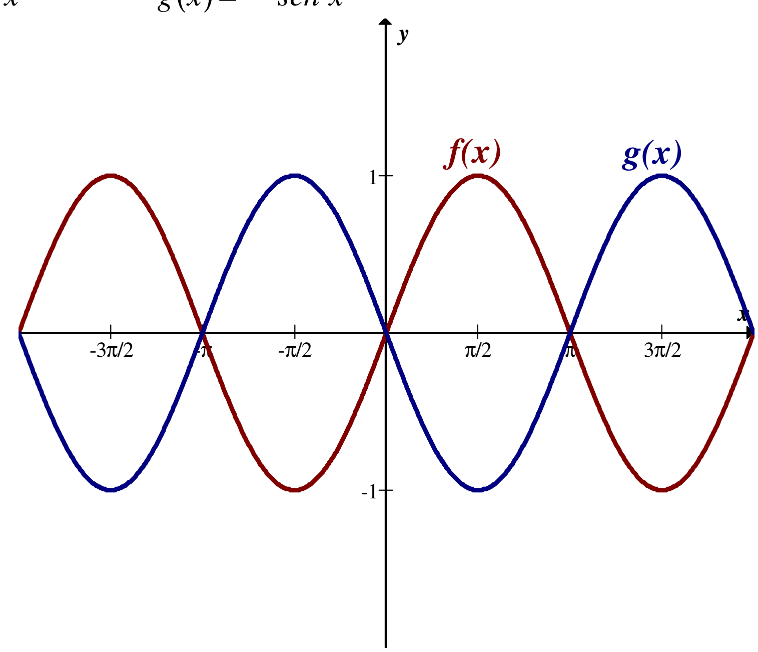
- $D(f) = D(g) = D(h)$.
- $\text{Im}\,(f) = [-1, 1]$ $\text{Im}\,(g) = [2, 4]$ $\text{Im}\,(g) = [-4, -2]$.
- De f para g houve um deslocamento vertical para cima e de f para h houve um deslocamento vertical para baixo.
- Os pontos de máximo e mínimo coincidem para f, g e h, bem como os intervalos de crescimento e de decrescimento.

(d) $f(x) = \cos x$ $g(x) = \cos\,(x+2)$ $h(x) = \cos\,(x-2)$



- $D(f) = D(g) = D(h)$.
- $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Im}(g) = \mathrm{Im}(h)$.
- De f para g: deslocamento horizontal para a esquerda.
- De f para h: deslocamento horizontal para a direita.
- Pontos de máximos:
  $f(x)$: $2k\pi, k \in Z$
  $g(x)$: $-2 + 2k\pi, k \in Z$
  $h(x)$: $2 + 2k\pi, k \in Z$
- Pontos de mínimos:
  $f(x)$: $\pi + 2k\pi, k \in Z$
  $g(x)$: $\pi - 2 + 2k\pi, k \in Z$
  $h(x)$: $\pi + 2 + 2k\pi, k \in Z$
- Intervalos de crescimento:
  $f(x)$: $[\pi + 2k\pi, 2\pi + 2k\pi], k \in Z$
  $g(x)$: $[\pi - 2 + 2k\pi, 2\pi - 2 + 2k\pi], k \in Z$
  $h(x)$: $[\pi + 2 + 2k\pi, 2\pi + 2 + 2k\pi], k \in Z$
- Intervalos de decrescimento:
  $f(x)$: $[2k\pi, \pi + 2k\pi]\, k \in Z$
  $g(x)$: $[-2 + 2k\pi, \pi - 2 + 2k\pi]\, k \in Z$
  $h(x)$: $[2 + 2k\pi, \pi + 2 + 2k\pi]\, k \in Z$

e) $f(x) = sen\ x$ $\qquad$ $g(x) = -sen\ x$



- $D(f) = D(g)$.
- $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Im}(g) = [-1, 1]$.
- De f para g: reflexão em torno do eixo dos x.
- Pontos de máximo:

  $f(x): \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi$

  $g(x): \dfrac{3\pi}{2} + 2k\pi$
- Pontos de mínimo:

  $f(x): \dfrac{3\pi}{2} + 2k\pi$

  $g(x): \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi$
- Intervalos de crescimento:

  $f(x): \left[-\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi, \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi\right], k \in \mathbb{Z}$

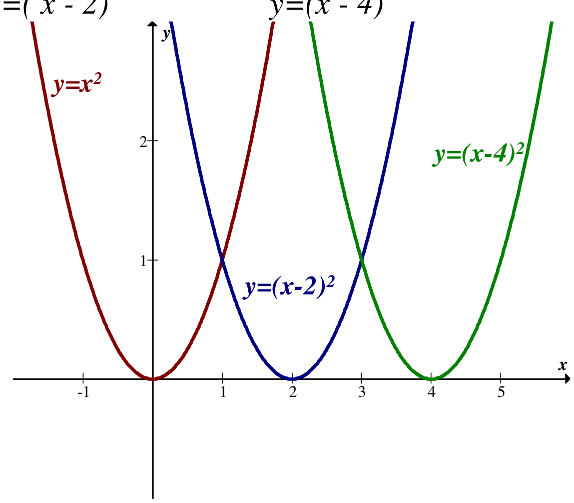
  $g(x): \left[\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi, \dfrac{3\pi}{2} + 2k\pi\right], k \in \mathbb{Z}$
- Intervalos de decrescimento

  $f(x): \left[\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi, \dfrac{3\pi}{2} + 2k\pi\right], k \in \mathbb{Z}$

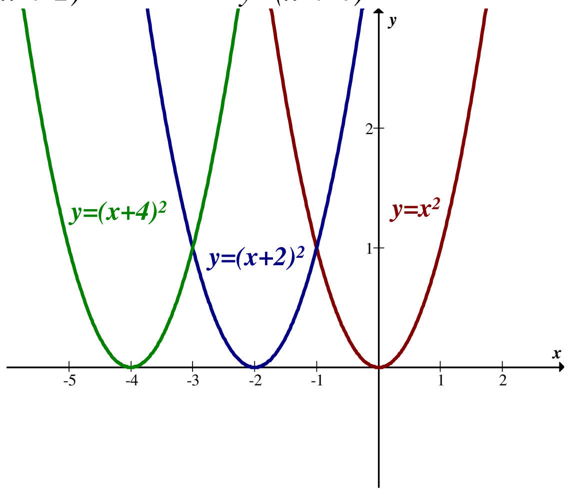
  $g(x): \left[-\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi, \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi\right], k \in \mathbb{Z}$.

47. Usando uma ferramenta gráfica, trace numa mesma janela, o gráfico das funções dadas em cada item e, a seguir, responda a questão:
Dado o gráfico de $f(x)$, o que se pode afirma sobre o gráfico de $g(x) = f(x-a)$ quando a>0? E quando a<0?

(a) $y = x^2$ $\quad$ $y = (x-2)^2$ $\quad$ $y = (x-4)^2$



(b) $y = x^2$ $y=(x+2)^2$ $y=(x+4)^2$

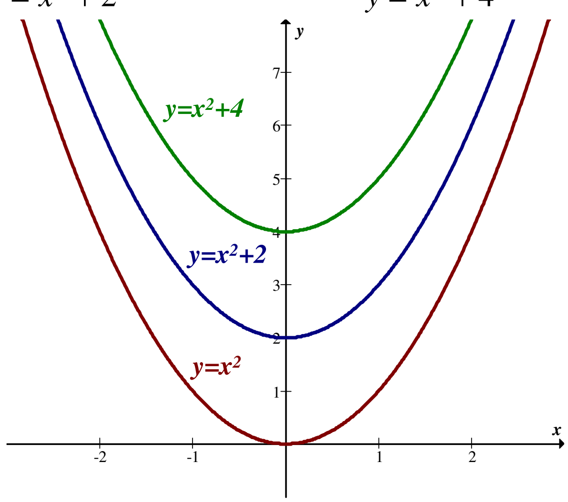


Conclusão:

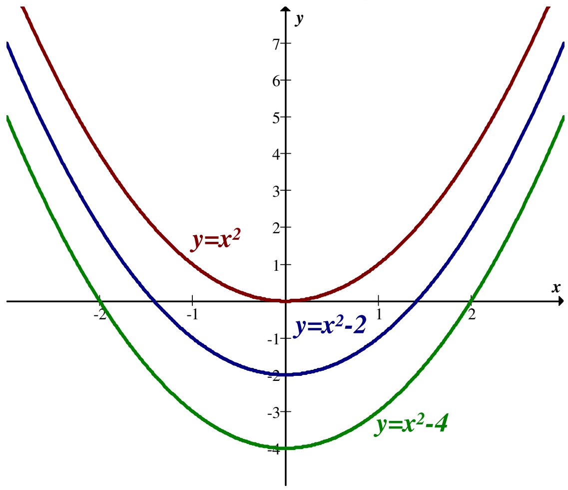
- Quando $a > 0$ o gráfico de $g(x)$ tem a mesma forma do gráfico de $f(x)$, deslocando-se a unidades para a direita.
- Quando o $a < 0$, o gráfico de $g(x)$ tem a mesma forma do gráfico de $f(x)$, deslocando-se a unidades para a esquerda.

48. Usando uma ferramenta gráfica, trace numa mesma janela, o gráfico das funções dadas em cada item e, a seguir, responda a questão:
Dado o gráfico de $f(x)$, o que se pode afirmar sobre o gráfico de $g(x) = f(x) + a$, quando a>0? E quando a<0?

(a) $y = x^2$ $y = x^2 + 2$ $y = x^2 + 4$



(b) $y = x^2$ $y = x^2 - 2$ $y = x^2 - 4$

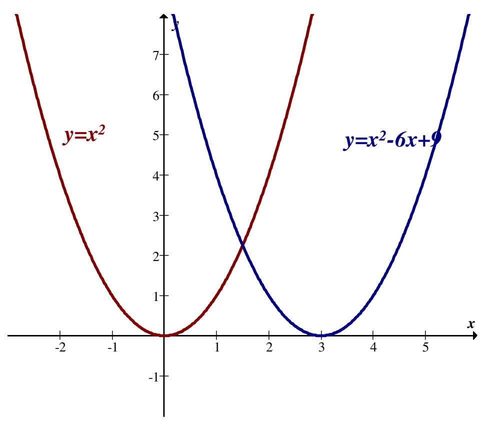


Conclusão:

- Quando $a < 0$, o gráfico de $g(x)$ tem a mesma forma do gráfico de $f(x)$, deslocando-se verticalmente a unidades para baixo.
- Quando $a > 0$, o gráfico de $g(x)$ tem a mesma forma do gráfico de $f(x)$, deslocando-se verticalmente a unidades para cima.

49. Identifique algebricamente as transformações realizadas na parábola "mãe" $f(x) = x^2$, para obter as seguintes funções quadráticas. A seguir, trace o gráfico e compare os resultados.

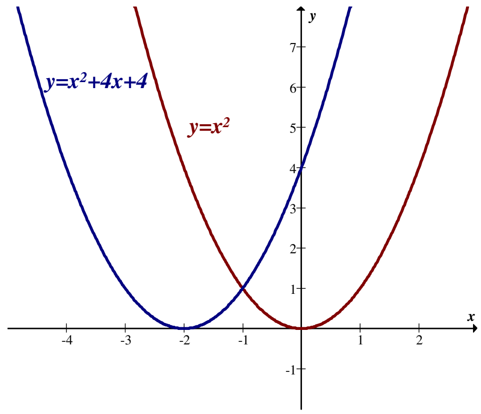
(a) $f(x) = x^2 - 6x + 9$



$$f(x) = x^2 - 6x + 9$$
$$= (x-3)^2$$

Deslocamento horizontal de 3 unidades para a direita.

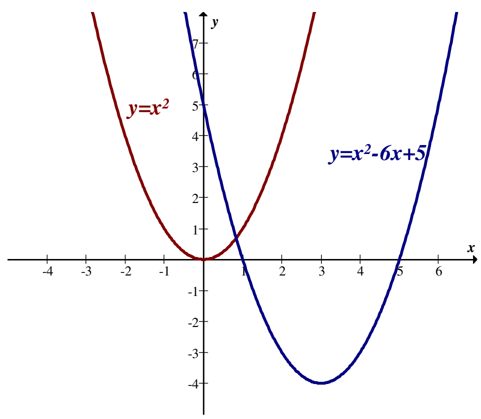
(b) $f(x) = x^2 + 4x + 4$



$$f(x) = x^2 + 4x + 4$$
$$= (x+2)^2$$

Deslocamento horizontal de 2 unidades para a esquerda.

(c) $f(x) = x^2 - 6x + 5$



$$f(x) = x^2 - 6x + 5$$
$$= x^2 - 2\cdot 3x + 9 - 9 + 5$$
$$= (x-3)^2 - 4$$

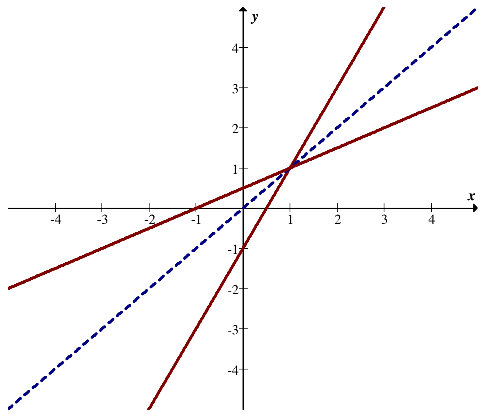
Deslocamento horizontal de 3 unidades para a direita e deslocamento vertical de 4 unidades para baixo.

50. Determine algebricamente a função inversa. A seguir, numa mesma janela, trace o gráfico de cada função, de sua inversa e da função identidade.

(a) $y = 2x - 1$

$$y = 2x - 1$$
$$2x = y + 1$$
$$x = \frac{1}{2}(y + 1)$$

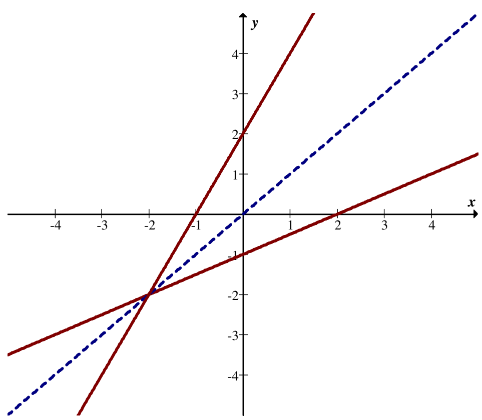
Assim, temos: $y = \frac{1}{2}(x + 1)$



(b) $y = \frac{x}{2} - 1$

$$\frac{x}{2} = y + 1$$
$$x = 2y + 2$$

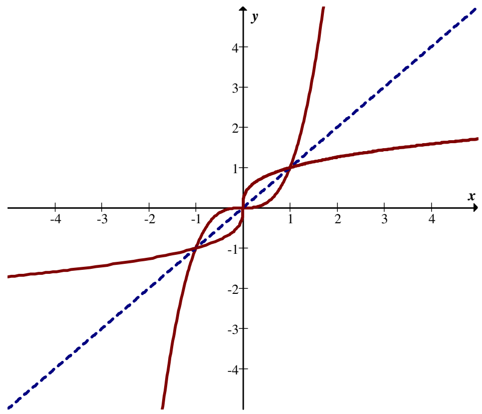
Assim, temos: $y = 2x + 2$



(c) $y = x^3$

$$x = \sqrt[3]{y}$$

Assim, temos: $y = \sqrt[3]{x}$



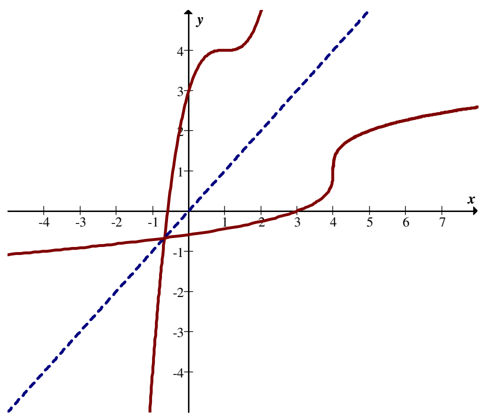
(d) $y = (x-1)^3 + 4$

$(x-1)^3 = y - 4$

$x - 1 = \sqrt[3]{y-4}$

$x = 1 + \sqrt[3]{y-4}$

Assim, temos: $y = 1 + \sqrt[3]{x-4}$



51. Para cada uma das funções, se necessário, restrinja o domínio e o contradomínio e determine a inversa.

(a) $y = x^2$

(b) $y = x^2 - 2x + 1$

(c) $y = 2x^2 - 6x - 10$

(d) $y = e^x$

(a) $y = x^2$ $\quad [0, +\infty)$

$x = \sqrt{y},\ y \geq 0$

Portanto, $y = \sqrt{x}$.

(b)

$$y = x^2 - 2x + 1$$
$$= (x-1)^2,\ x \in [1, +\infty)$$
$$(x-1) = \sqrt{y},\ y \geq 0$$
$$x = 1 + \sqrt{y}$$

Portanto, $y = 1 + \sqrt{x}$.

(c)

$$y = 2x^2 - 6x - 10$$
$$= 2\left(x^2 - 3x - 5\right)$$
$$= 2\left(x^2 - 2.\frac{3}{2}x + \frac{9}{4}\right) - \frac{9}{2} - 10$$
$$= 2\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{29}{2},\ x \geq \frac{3}{2}$$

$$y + \frac{29}{2} = 2\left(x - \frac{3}{2}\right)^2$$
$$\frac{y}{2} + \frac{29}{4} = \left(x - \frac{3}{2}\right)^2$$
$$x - \frac{3}{2} = \sqrt{\frac{y}{2} + \frac{29}{4}}$$
$$x = \frac{3}{2} + \sqrt{\frac{y}{2} + \frac{29}{4}}$$

Portanto, $y = \dfrac{3}{2} + \sqrt{\dfrac{x}{2} + \dfrac{29}{4}}$.

(d) $y = e^x \quad \Leftrightarrow \ln y = x$

$y = \ln x, \quad x > 0$

52. A locadora A aluga um carro popular ao preço de R$ 30,00 a diária, mais R$ 0,20 por quilômetro rodado. A locadora B o faz por R$ 40,00 a diária, mais R$ 0,10 por quilômetro rodado. Qual locadora você escolheria, se pretendesse alugar um carro por um dia e pagar o menos possível? Justifique algebricamente e graficamente.

Algebricamente:

$P_A = 30 + 0{,}2\,x$

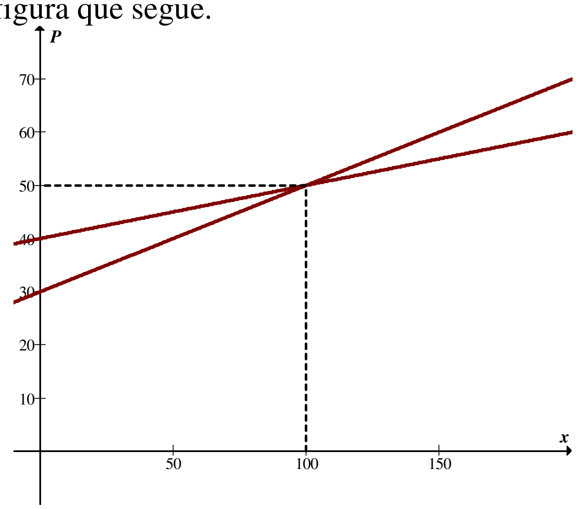
$P_B = 40 + 0{,}1\,x$

sendo x = n° km rodados e P = preço.

$$\begin{aligned} P_A &\geq P_B \\ 30 + 0{,}2\,x &\geq 40 + 0{,}1\,x \\ 0{,}1\,x &\geq 10 \\ x &\geq 100 \end{aligned}$$

Se pretendo me deslocar mais de 100 *km,* devo escolher a locadora B e, em caso contrário, a locadora A.

Graficamente temos a figura que segue.



53. Dentre todos os retângulos de perímetro igual a 80 cm, quais as dimensões do retângulo de área máxima?

Seja o retângulo de dimensões x e w com perímetro (2P) igual a 80 cm. Temos então que:

$$\begin{aligned} 2P &= 2x + 2w \\ 40 &= x + w \\ w &= 40 - x \end{aligned}$$

Considerando a área A

$$\begin{aligned} A &= x\,w \\ &= (40 - x)\,x \\ &= -x^2 + 40\,x \end{aligned}$$

Estamos assim diante de uma função do segundo grau. O ponto de máximo está no seu vértice, ou seja, em *x=20*. Portanto, o valor de w é 20 e, nesse caso, estamos diante de um quadrado de lado igual a 20 cm.

54. Para medir a temperatura são usados graus Celsius (^{0}C) ou graus Fahrenheit (^{0}F). Ambos os valores 0 ^{0}C e 32 ^{0}F representam a temperatura em que a água congela e ambos os valores 100 ^{0}C e 212 ^{0}F representam a temperatura de fervura da água. Suponha que a relação entre as temperaturas expressas nas duas escalas pode ser representada por uma reta.

(a) Determine a função do primeiro grau F(c) que dá a temperatura em ^{0}F, quando ela é conhecida em ^{0}C.

Vamos considerar a função como do tipo $F = aC + b$, sendo F a temperatura em graus Fahrenheit e C a temperatura em graus Celsius.

Temos as seguintes relações:

$C = 0 \Rightarrow F = 32$

$C = 100 \Rightarrow F = 212$

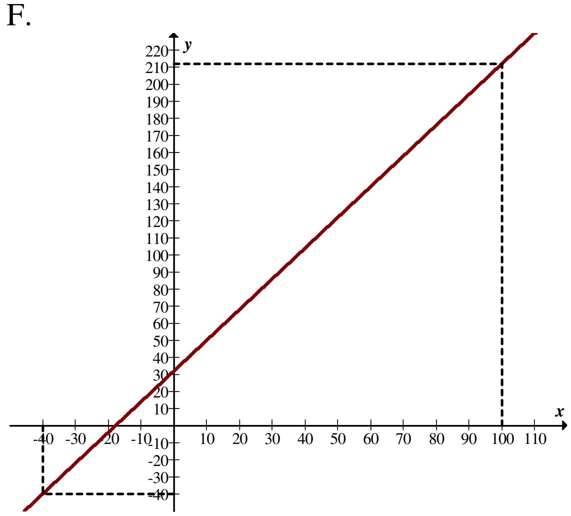
Assim podemos resolver o sistema

$$\begin{cases} 32 = 0\,a + b \\ 212 = a\,100 + b \end{cases}$$

para achar os parâmetros *a* e *b*.

Resolvendo o sistema encontramos $b = 32$ e $a = 1{,}8$. Dessa forma, a função é dada por $F = 1{,}8C + 32$ ou $y = 1{,}8x + 32$, sendo x a temperatura em graus Celsius e y a temperatura em graus Fahrenheit.

(b) Esboce o gráfico de F.



(c) Qual a temperatura em ^{0}F que corresponde a 25 ^{0}C?

$$y = 1{,}8 \cdot 25 + 32$$
$$y = 77°F$$

(d) Existe alguma temperatura que tem o mesmo valor numérico em ^{0}C e em ^{0}F?

$$x = 1{,}8x + 32$$
$$-32 = 1{,}8x - x$$
$$0{,}8x = -32$$
$$x = \frac{-32}{0{,}8}$$
$$x = -40^o F$$

55. Numa dada cidade a população atual é de 380.000 habitantes. Se a população apresenta uma taxa de crescimento anual de 1,5%, estime o tempo necessário para a população duplicar. Use um modelo de crescimento exponencial.

$$P = P_0 \; i^t$$
$$2 \cdot 380\,000 = 380\,000 \cdot 1{,}015^t$$
$$2 = 1{,}015^t$$
$$\ln 2 = t \ln 1{,}015$$
$$t = \frac{\ln 2}{\ln 1{,}015}$$
$$t = 46{,}55$$
$$t \cong 47 \; anos$$

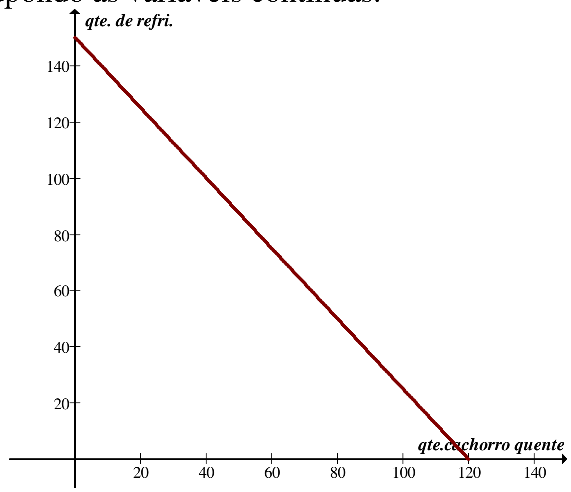
56. Uma criança tem um montante fixo M=R$180,00 para comprar latinhas de refrigerantes e cachorros quentes para sua festa de aniversário. Suponha que cada latinha de refrigerante custe R$1,20 e cada cachorro quente R$1,50.

(a) Obtenha a equação de restrição orçamentária.

Seja p_1 = preço refrigerante
p_2 = preço cachorro-quente
q_1 = quantidade de refrigerante
q_2 = quantidade de cachorro-quente
Podemos escrever a equação

$$q_1 p_1 + q_2 p_2 = M$$
$$1{,}2\, q_1 + 1{,}5\, q_2 = 180$$

(b) Esboce o gráfico, supondo as variáveis contínuas.



(c) Se a criança optar por usar todo seu orçamento comprando somente cachorros quentes, estime o número de cachorros quentes que podem ser comprados.

$$1{,}5\, q_2 = 180 - 1{,}2\, q_1$$
$$q_2 = \frac{180}{1{,}5} - \frac{1{,}2}{1{,}5}\, q_1$$
$$q_2 = 120 - 0{,}8\, q_1$$
$$q_2 = 120 - 0{,}8 \cdot 0 = 120$$

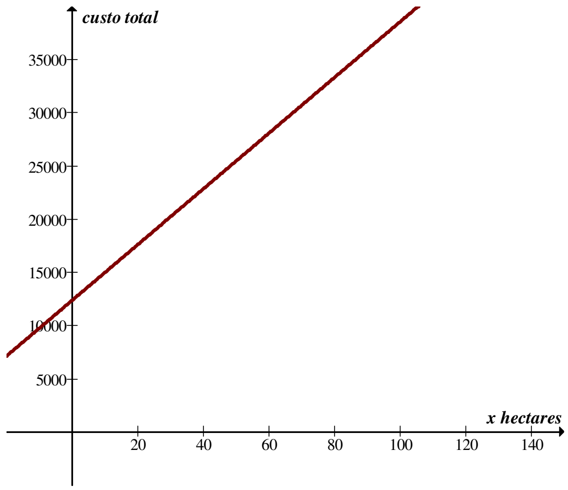
57. O custo total de uma plantação de soja é função, em geral, da área cultivada. Uma parcela do custo é aproximadamente constante (custos fixos) e diz respeito a benfeitorias e equipamentos necessários. A outra parcela diz respeito aos custos dos insumos e mão-de-obra, e depende da área plantada (custos variáveis). Supor que os custos fixos sejam de R$ 12.400,00 e os custos variáveis sejam de R$ 262,00 por hectare.

(a) Determinar o custo total da plantação em função do número de hectares plantado.

$$C_T = 12\,400 + 262x$$

sendo x = número de hectares plantados.

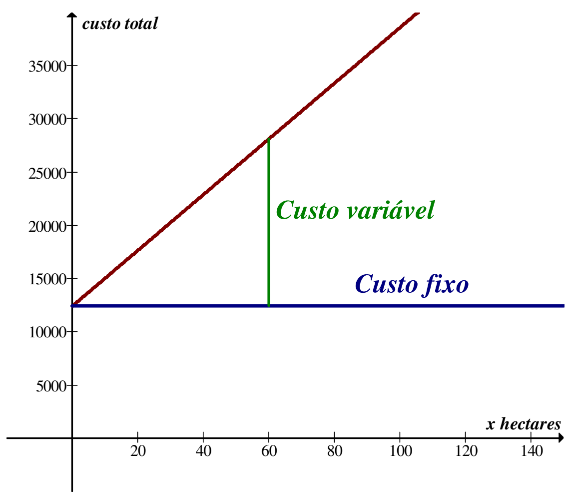
(b) Fazer um esboço do gráfico da função custo total.



(c) Como podemos visualizar os custos fixos e variáveis no gráfico?

O custo fixo é o ponto onde a reta corta o eixo dos y.

O custo variável é dado pelo comprimento do segmento vertical entre a reta que representa o custo total e a reta horizontal, que representa o custo fixo.



58. A meia-vida do rádio-226 é de 1620 anos.

(a) obter o modelo de decaimento exponencial para essa substância.

O modelo de decaimento exponencial é dado por $M = M_0\, e^{-kt}$, sendo que para o presente problema temos $t = 1620 \quad e \quad M = \dfrac{M_0}{2}$. Assim:

$$\frac{M_0}{2} = M_0\, e^{-k \cdot 1620}$$
$$\ln\left(\frac{1}{2}\right) = -k\,.1620$$
$$\frac{-\ln 2}{-1620} = k$$
$$k = 0,000\,4279$$
Logo, $M = M_0\, e^{-0,\,000\,4279\, t}$

(b) Após 700 anos, qual o percentual de uma dada quantidade inicial de rádio que ainda resta?

$$M = M_0\, e^{-0,\,000\,4279 \times 700}$$
$$M \cong 0{,}74\, M_0$$
Resposta: 74 %

59. Uma certa substância radioativa decai exponencialmente sendo que, após 100 anos, ainda restam 60% da quantidade inicial.

(a) Obter o modelo de decaimento exponencial para essa substância.

$$M = M_0\, e^{-kt}$$
$$0{,}6\, M_0 = M_0\, e^{-100k}$$
$$\ln 0{,}6 = -100k$$
$$-0{,}510825 = -100k$$
$$k = 0{,}005108$$
Logo, $M = M_0\, e^{-0{,}005108\, t}$

(b) Determinar a sua meia-vida.

$$\frac{M_0}{2} = M_0\, e^{-0{,}005108\, t}$$
$$\ln\frac{1}{2} = -\,0{,}005108\, t$$
$$t \cong 135{,}7\ anos$$

(c) Determinar o tempo necessário para que reste somente 15 % de uma dada massa inicial.

$$0{,}15\, M_0 = M_0\, e^{-0{,}005108\, t}$$
$$\ln 0{,}15 = -\,0{,}005108\, t$$
$$t \cong 371{,}4\ anos$$