# UNIDADE 3

# 3.6 – EXERCÍCIO – pg. 72

**Observação: Seguem inicialmente somente as respostas dos exercícios 1 ao 5**

1 – a) $\lim_{x \to 3^-} f(x) = -1$

b) $\lim_{x \to 3^+} f(x) = 3$

c) $\lim_{x \to 3} f(x) \nexists$

d) $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -1$

e) $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 3$

f) $\lim_{x \to 4} f(x) = 3$

2 – a) $\lim_{x \to -2^+} f(x) = 0$

b) $\lim_{x \to -2^-} f(x) = 0$

c) $\lim_{x \to -2} f(x) = 0$

d) $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

3 – a) $\lim_{x \to 0^+} f(x) = 0$

b) $\lim_{x \to 0^-} f(x) = 0$

c) $\lim_{x \to 0} f(x) = 0$

d) $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

e) $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

f) $\lim_{x \to 2} f(x) = 4$

4 – a) $\lim_{x \to 2^+} f(x) = 0$

b) $\lim_{x \to 2^-} f(x) = 0$

c) $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

d) $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

e) $\lim_{x \to 1} f(x) = 1$

5 – (a) $\lim_{x \to 1^+} f(x) = +\infty$

(b) $\lim_{x \to 1^-} f(x) = \frac{1}{2}$

(c) $\lim_{x \to 1} f(x) \nexists$

(d) $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \frac{1}{2}$

(e) $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

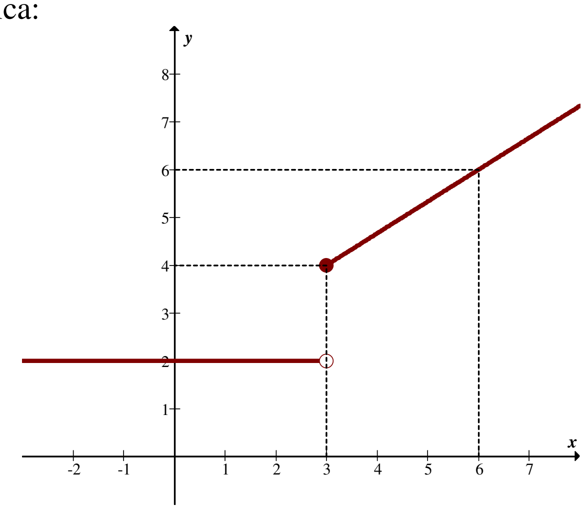
6 – Descrever analiticamente e graficamente uma função $y = f(x)$ tal que $\lim_{x \to 3} f(x)$ não existe e $\lim_{x \to 6} f(x)$ existe.

Podemos ter infinitos exemplos que atendem às características solicitadas. Segue um exemplo.

Descrição analítica:

$$f(x) = \begin{cases} 2, & x < 3 \\ \dfrac{2}{3}x + 2, & x \geq 3 \end{cases}$$

Descrição gráfica:



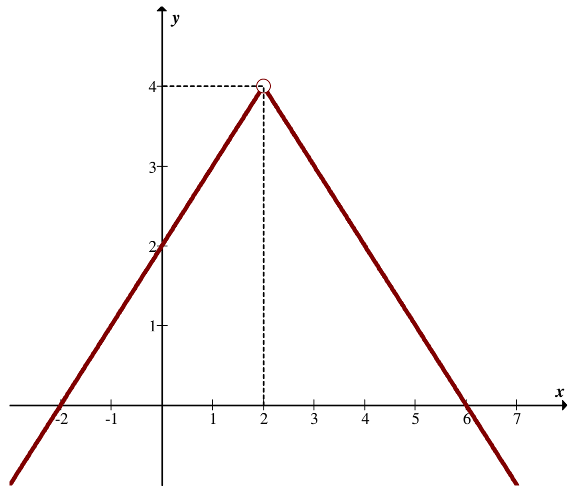

7 – Definir uma função $y = g(x)$ tal que $\lim_{x \to 2} g(x) = 4$, mas $g(x)$ não é definida em $x = 2$.

Podemos ter infinitos exemplos que atendem às características solicitadas. Segue um exemplo.

Descrição analítica:

$$g(x) = \begin{cases} x + 2, & x < 2 \\ -x + 6, x > 2 \end{cases}$$

Descrição gráfica:



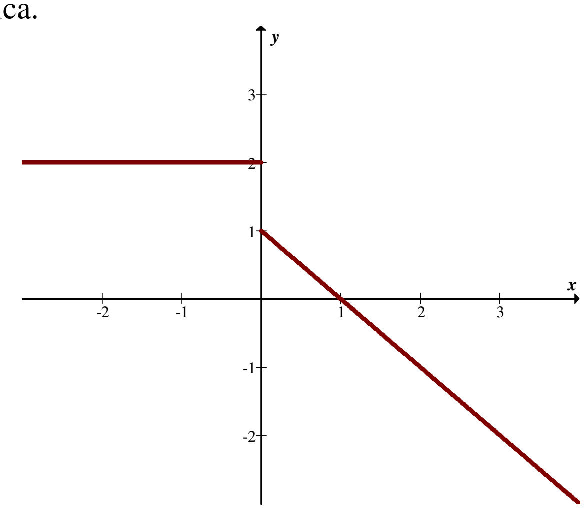

8 – Definir e fazer o gráfico de uma função $y = h(x)$ tal que $\lim_{x\to 0^+} h(x) = 1$ e $\lim_{x\to 0^-} h(x) = 2$.

Podemos ter infinitos exemplos que atendem às características solicitadas. Segue um exemplo.

Descrição analítica:

$$h(x) = \begin{cases} 2, & x < 0 \\ -x+1, & x > 0 \end{cases}$$

Descrição gráfica.




9 - Mostrar que existe o limite de $f(x) = 4x - 5$ em $x = 3$ e que é igual a 7.

Queremos mostrar que $\lim_{x\to 3} (4x-5) = 7$

Dado $\varepsilon > 0$, devemos mostrar que existe um $\delta > 0$ tal que

$|4x-5-7|<\varepsilon$ sempre que $0<|x-3|<\delta$.
Temos,
$|4x-5-7|=|4x-12|=|4(x-3)|=4|x-3|$.
Assim, devemos ter $4|x-3|<\varepsilon$ sempre que $0<|x-3|<\delta$.

Portanto, basta fazer $\delta=\dfrac{\varepsilon}{4}$.

Observamos que qualquer $\delta\leq\dfrac{\varepsilon}{4}$ poderia ser tomado.

10 - Mostrar que $\lim\limits_{x\to 3} x^2=9$.

Dado $\varepsilon>0$ devemos mostrar que existe um $\delta>0$ tal que $|x^2-9|<\varepsilon$ sempre que $0<|x-3|<\delta$.
Temos:
$|x^2-9|=|(x-3)(x+3)|=|x-3||x+3|$
Supondo $0<\delta\leq 1$, da desigualdade $0<|x-3|<\delta$, vem
$|x-3|<1$
$-1<x-3<1$
$2<x<4$
$5<x+3<7$

Portanto, $|x+3|<7$ e, então,
$|x^2-9|=|x-3||x+3|<\delta.7$, sempre que $0<|x-3|<\delta$.

Assim, basta tomar $\delta=mim\left(\dfrac{\varepsilon}{7},1\right)$.

Nos exercício 11 a 15 é dado $\lim\limits_{x\to a} f(x)=L$. Determinar um número $\delta$ para o $\varepsilon$ dado tal que $|f(x)-L|<\varepsilon$ sempre que $0<|x-a|<\delta$.

11 - $\lim\limits_{x\to 2}(2x+4)=8$ , $\varepsilon=0{,}01$
$|2x+4-8|<\varepsilon$ sempre que $0<|x-2|<\delta$
$|2x+4-8|=|2x-4|=|2(x-2)|=2|x-2|$
Então
$2|x-2|<\varepsilon$ sempre que $0<|x-2|<\delta$
Basta fazer $\delta=\dfrac{\varepsilon}{2}=\dfrac{0{,}01}{2}=0{,}005$

12 - $\lim\limits_{x \to -1} (-3x + 7) = 10$ , $\varepsilon = 0{,}5$

$|-3x + 7 - 10| < \varepsilon$ sempre que $0 < |x - (-1)| < \delta$

Temos

$|-3x - 3| = |-3(x+1)| = |-3||x+1| = 3|x+1|$

Então

$3|x+1| < \varepsilon$ sempre que $0 < |x+1| < \delta$

Basta fazer $\delta = \dfrac{\varepsilon}{3} = \dfrac{0{,}5}{3} = 0{,}166...$

13 - $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{x^2 - 4}{x + 2} = -4$ , $\varepsilon = 0{,}001$

Dado $\varepsilon = 0{,}1$ existe um $\delta > 0$ tal que

$\left|\dfrac{x^2 - 4}{x + 2} + 4\right| < \varepsilon$ sempre que $0 < |x + 2| < \delta$

$\left|\dfrac{(x-2)(x+2)}{x+2} + 4\right| < \varepsilon$

$|x + 2| < \varepsilon, x \neq -2$

Basta fazer $\delta = \varepsilon = 0{,}1$

14 - $\lim\limits_{x \to 5} \dfrac{1}{2 - x} = \dfrac{-1}{3}$ , $\varepsilon = 0{,}25$

Dado $\varepsilon = 0{,}25$, existe $\delta > 0$ tal que

$\left|\dfrac{1}{2 - x} + \dfrac{1}{3}\right| < \varepsilon$ sempre que $0 < |x - 5| < \delta$

Temos,

$\left|\dfrac{3 + (2 - x)}{3(2 - x)}\right| = \left|\dfrac{3 + 2 - x}{3(2 - x)}\right| = \left|\dfrac{5 - x}{3(2 - x)}\right| = \left|\dfrac{x - 5}{3(x - 2)}\right|, \ x \neq 2$

Supondo $0 < \delta \leq 1$, da desigualdade $0 < |x - 5| < \delta$, segue que

$$|x-5|<1$$
$$-1<x-5<1$$
$$4<x<6$$
$$2<x-2<4$$
$$2<|x-2|<4$$
$$\frac{1}{2}>\frac{1}{|x-2|}>\frac{1}{4}$$

Portanto,

$$\left|\frac{1}{2-x}+\frac{1}{3}\right|=\left|\frac{x-5}{3(x-2)}\right|=\frac{1}{3}\left|\frac{1}{x-2}\right||x-5|<\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}|x-5|=\frac{1}{6}|x-5|$$

Então $\delta=\min\{6\times 0{,}25;1\}=1$

15 - $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x-1}=2 \qquad \varepsilon=0{,}75$

Dado $\varepsilon=0{,}75$ existe um $\delta>0$ tal que

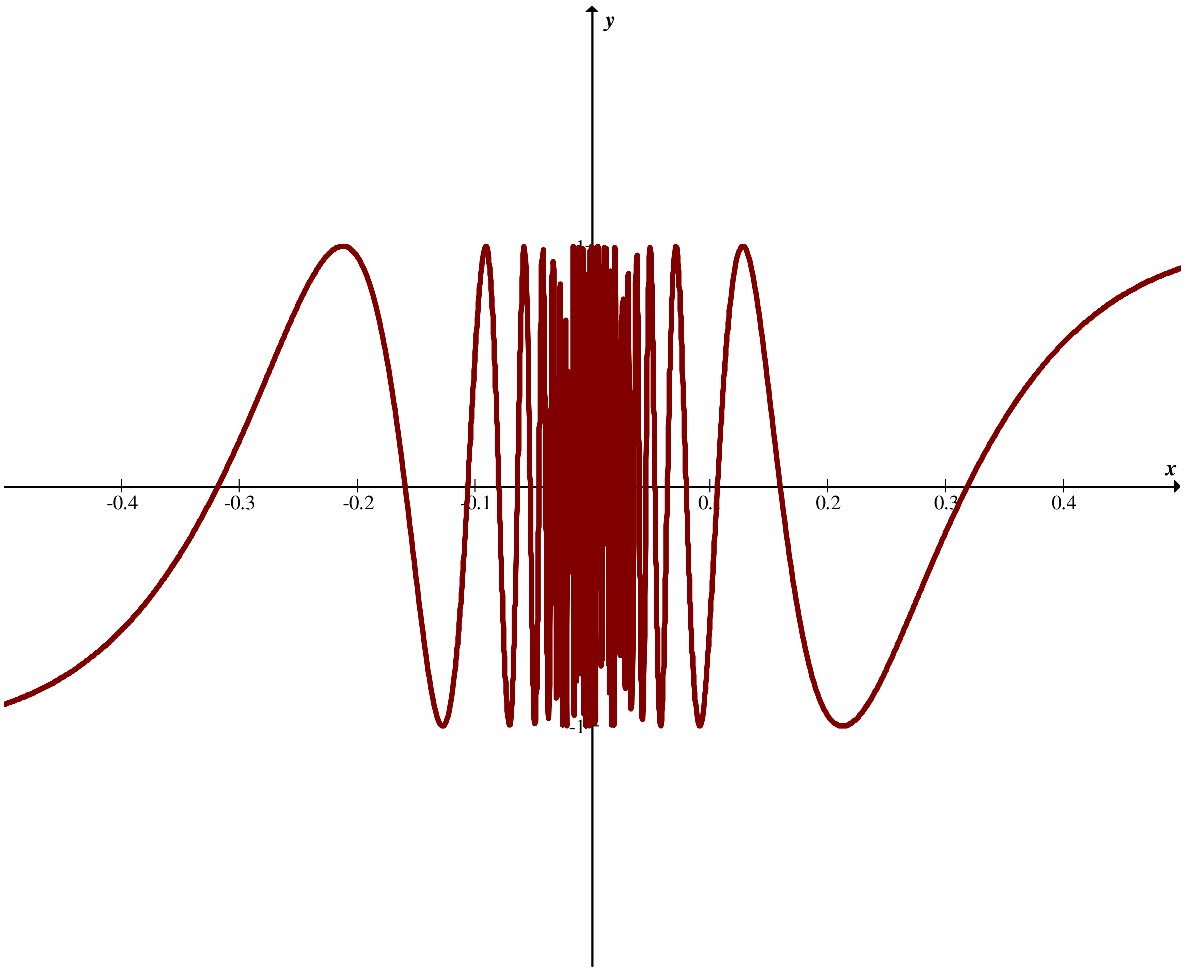
$$\left|\frac{x^2-1}{x-1}-2\right|<\varepsilon \text{ sempre que } 0<|x-1|<\delta$$

$$\left|\frac{(x-1)(x+1)}{x-1}-2\right|=|x-1|<\varepsilon \text{, para } x\neq 1.$$

Basta fazer $\delta=\varepsilon=0{,}75$

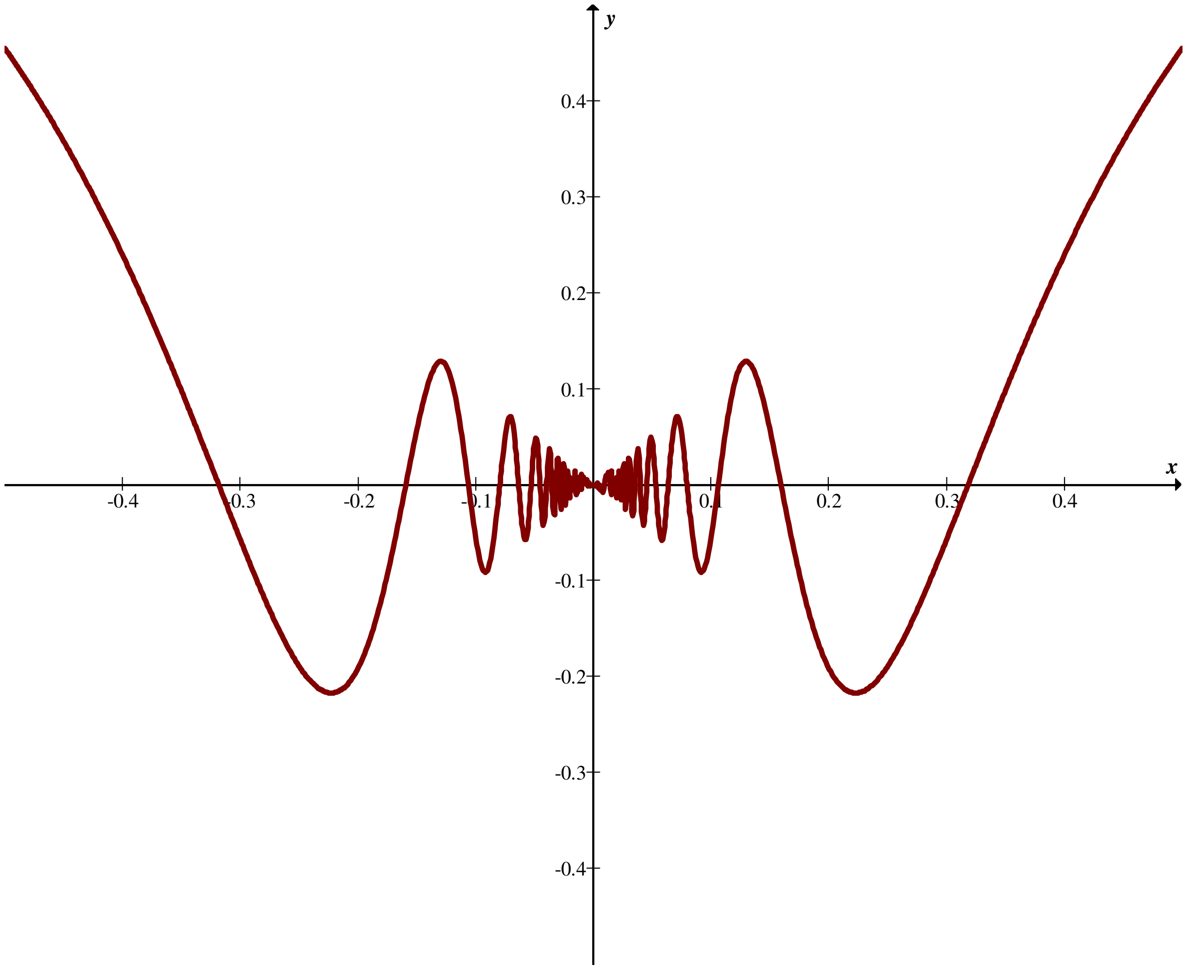
16 – Fazer o gráfico das funções $y=f(x)$ dadas, explorando diversas escalas para visualizar melhor o gráfico numa vizinhança da origem. Observando o gráfico, qual a sua conjectura sobre o $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$? Comprove analiticamente se a sua conjectura é verdadeira.

(a) $f(x)=sen\dfrac{1}{x}$




Analisando graficamente, afirmamos que $\lim_{x \to 0} f(x)$ não existe.

(b) $f(x) = x\, sen \dfrac{1}{x}$




Analisando graficamente, afirmamos que $\lim_{x \to 0} f(x)$ é igual a zero. Analiticamente temos:

$$\lim_{x \to 0} x \cdot sen\frac{1}{x} = 0$$

De fato, a função seno tem os valores entre -1 e 1. Então $-1 \leq sen\frac{1}{x} \leq 1$ , $\forall\ x \neq 0$.

Multiplicando a desigualdade por $x > 0$, vem:

$$-x \leq xsen\frac{1}{x} < x \,, \forall\ x > 0$$

Como $\lim_{x \to 0^+} x = 0$

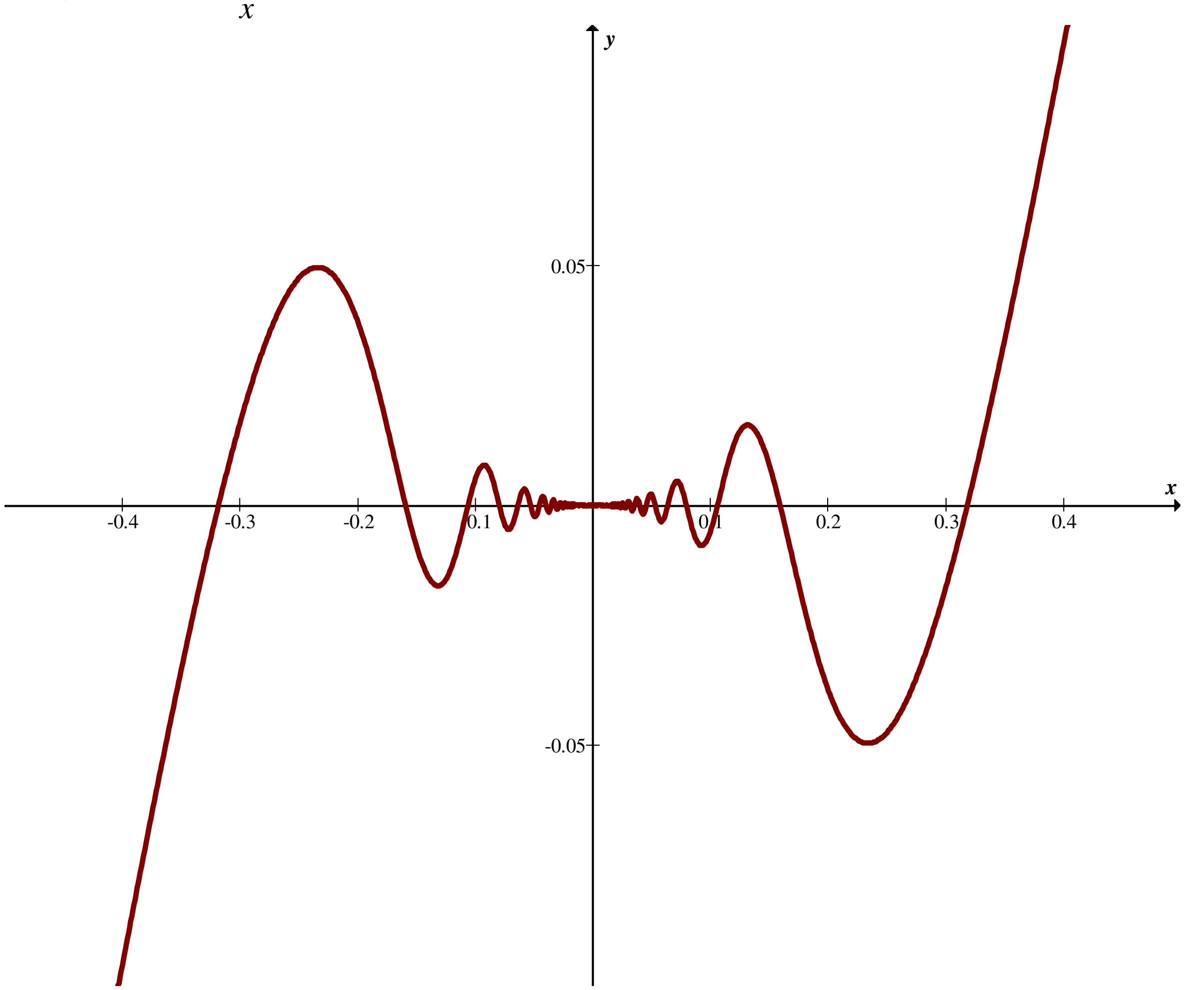
$\lim_{x \to 0^+} -x = 0$

Pela regra do sanduíche segue que $\lim_{x \to 0^+} xsen\frac{1}{x} = 0$.

Analogamente, obtém-se que $\lim\limits_{x \to 0^-} x sen\dfrac{1}{x} = 0$.

.

(c) $f(x) = x^2 sen\dfrac{1}{x}$




Analisando graficamente, afirmamos que $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ é igual a zero. Analiticamente temos:

$$\lim_{x \to 0} x^2 \cdot sen\frac{1}{x} = 0$$

A função seno tem os valores entre -1 e 1. Então $-1 \le sen\dfrac{1}{x} \le 1, \quad \forall\ x \ne 0$

Multiplicando a desigualdade por $x^2 > 0$, vem:

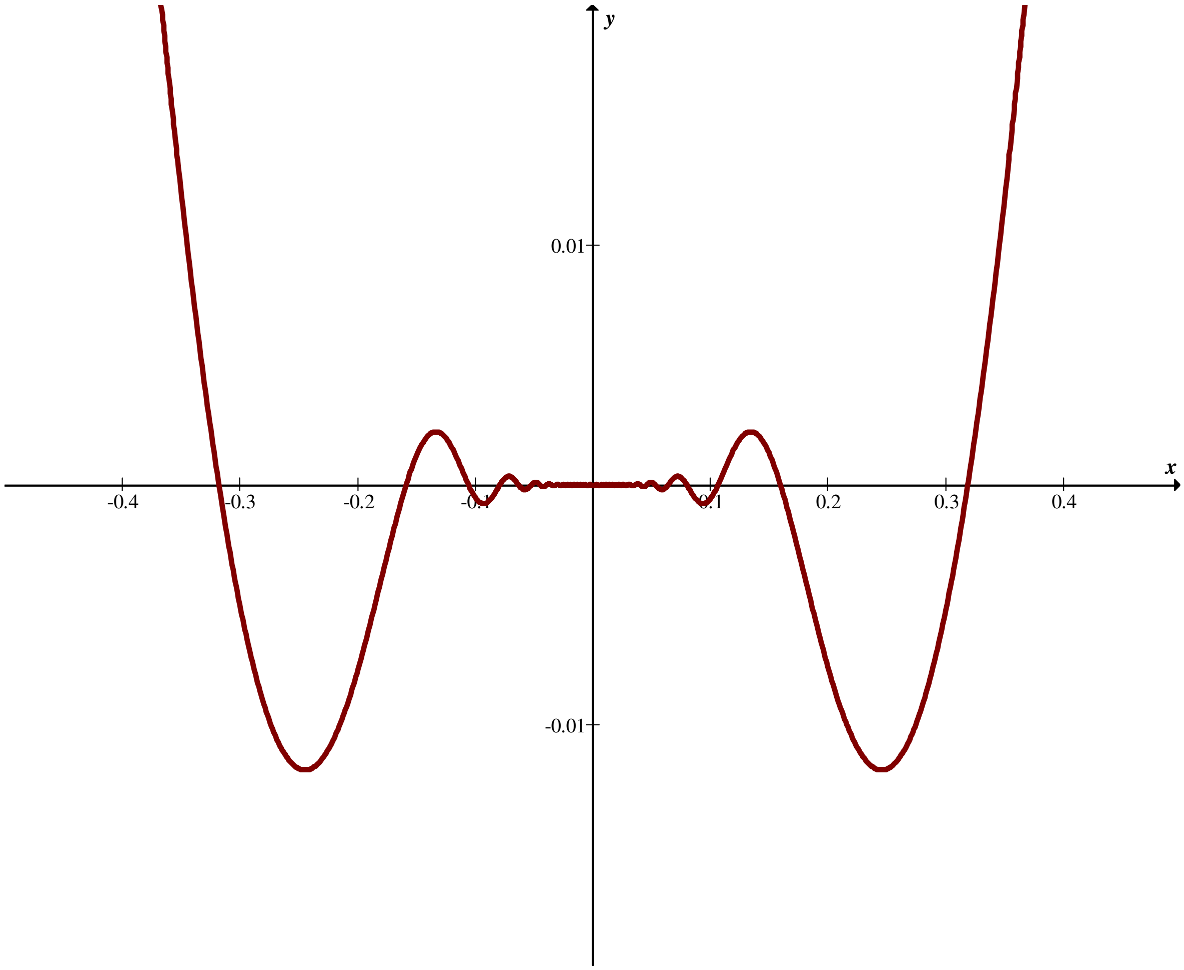
$$-x^2 \le x^2 sen\frac{1}{x} \le x^2,\ \forall\ x \ne 0$$

Como $\lim\limits_{x \to 0} x^2 = 0$ e $\lim\limits_{x \to 0} -x^2 = 0$, usando a Regra do Sanduíche, concluímos que

$$\lim_{x\to 0} x^2 \cdot sen\frac{1}{x} = 0$$

.

(d) $f(x) = x^3\, sen\frac{1}{x}$




Analisando graficamente, afirmamos que $\lim_{x\to 0} f(x)$ é igual a zero. Analiticamente, prova-se que $\lim_{x\to 0} x^3 \cdot sen\frac{1}{x} = 0$, da mesma forma utilizada no item (b).

17 - Mostrar que:

(i) Se *f* é uma função polinomial, então $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$ para todo real *a*.

Se *f* é uma função polinomial, pode ser escrita como

$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + .... + a_nx^n$ com $a_1, a_2, ...., a_n \in R$

Assim,

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a}(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + .... + a_n x^n)$$

$$\begin{cases} = \lim\limits_{x\to a} a_0 + \lim\limits_{x\to a} a_1 x + \lim\limits_{x\to a} a_2 x^2 + ... + \lim\limits_{x\to a} a_n x^n \\ = a_0 + a_1 \lim\limits_{x\to a} x + a_2 \lim\limits_{x\to a} x^2 + .... + a_n \lim\limits_{x\to a} x^n \\ = a_0 + a_1 \cdot a + a_2 \cdot a^2 + .... + a_n a^n \\ = f(a) \end{cases}$$

(ii) Se $g$ é uma função racional e $a \in D(g)$, então $\lim\limits_{x\to a} g(x) = g(a)$

Se $g$ é uma função racional ela é da forma

$g(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$, onde $P(x)$ e $Q(x)$ são polinômios reais e $D(g) = \{x / x \in R \ e \ Q(x) \neq 0\}$

Assim,

$$\lim_{x\to a} g(x) = \lim_{x\to a} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to a} P(x)}{\lim\limits_{x\to a} Q(x)} = \frac{P(a)}{Q(a)}$$

$= g(a)$ já que $a \in D(g)$, e, portanto, $Q(a) \neq 0$.

Calcular os limites nos exercícios 18 a 37 usando as propriedades de Limites.

18 - $\lim\limits_{x\to 0} (3 - 7x - 5x^2) = 3 - 7.0 - 5.0^2 = 3$

19 - $\lim\limits_{x\to 3} (3x^2 - 7x + 2) = 3 \cdot 3^2 - 7 \cdot 3 + 2$

$= 27 - 21 + 2$

$= 8$

20 - $\lim\limits_{x\to -1} (-x^5 + 6x^4 + 2) = -(-1)^5 + 6(-1)^4 + 2$

$= 1 + 6 + 2$

$= 9$

21 - $\lim\limits_{x\to \frac{1}{2}} (2x + 7) = 2.\dfrac{1}{2} + 7 = 8$

22 - $\lim\limits_{x\to -1} \left[(x+4)^3 \cdot (x+2)^{-1}\right] = (-1+4)^3 \cdot (-1+2)^{-1}$

$$= 27 \cdot 1 = 27$$

23 - $\lim_{x \to 0} \left[ (x-2)^{10} \cdot (x+4) \right] = (0-2)^{10} \cdot (0+4)$

$$= (-2)^{10} \cdot 4$$

$$= 4 \cdot 2^{10} = 2^{12} = 4096.$$

24 - $\lim_{x \to 2} \dfrac{x+4}{3x-1} = \dfrac{2+4}{3 \cdot 2 - 1} = \dfrac{6}{5}$

25 - $\lim_{t \to 2} \dfrac{t+3}{t+2} = \dfrac{2+3}{2+2} = \dfrac{5}{4}$

26 - $\lim_{x \to 1} \dfrac{x^2-1}{x-1} = \lim_{x \to 1} \dfrac{(x-1)(x+1)}{(x-1)} = \lim_{x \to 1} (x+1) = 2$

27 - $\lim_{t \to 2} \dfrac{t^2+5t+6}{t+2} = \dfrac{2^2+5 \cdot 2+6}{2+2} = \dfrac{4+10+6}{4} = \dfrac{20}{4} = 5$

28 - $\lim_{t \to 2} \dfrac{t^2-5t+6}{t-2} = \lim_{t \to 2} \dfrac{(t-2)(t-3)}{t-2} = \lim_{t \to 2} (t-3) = -1$

29 - $\lim_{s \to \frac{1}{2}} \dfrac{s+4}{2s} = \dfrac{\frac{1}{2}+4}{2 \cdot \frac{1}{2}} = \dfrac{\frac{1+8}{2}}{1} = \dfrac{9}{2}$

30 - $\lim_{x \to 4} \sqrt[3]{2x+3} = \sqrt[3]{2 \cdot 4 + 3} = \sqrt[3]{11}$

31 - $\lim_{x \to 7} (3x+2)^{\frac{2}{3}} = (3 \cdot 7 + 2)^{\frac{2}{3}} = 23^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{23^2}$

32 - $\lim_{x \to \sqrt{2}} \dfrac{2x^2 - x}{3x} = \dfrac{2(\sqrt{2})^2 - \sqrt{2}}{3 \cdot \sqrt{2}} = \dfrac{(4-\sqrt{2})\sqrt{2}}{3 \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \dfrac{4\sqrt{2}-2}{3 \cdot 2} = \dfrac{2(2\sqrt{2}-1)}{3 \cdot 2} = \dfrac{2\sqrt{2}-1}{3}$

33 - $\lim_{x \to 2} \dfrac{x\sqrt{x} - \sqrt{2}}{3x-4} = \dfrac{2\sqrt{2} - \sqrt{2}}{3 \cdot 2 - 4} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

34 - $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \left[ 2 sen x - \cos x + \cot g x \right] = 2\ sen \dfrac{\pi}{2} - \cos \dfrac{\pi}{2} + \cot g\, \dfrac{\pi}{2} = 2 \cdot 1 - 0 + 0 = 2$

35 - $\lim_{x \to 4} (e^x + 4x) = e^4 + 4 \cdot 4 = e^4 + 16$

36 - $\lim_{x \to -\frac{1}{3}} (2x+3)^{\frac{1}{4}} = \left(2 \cdot -\frac{1}{3} + 3\right)^{\frac{1}{4}} = \left(-\frac{2}{3} + 3\right)^{\frac{1}{4}} = \left(\frac{-2+9}{3}\right)^{\frac{1}{4}} = \left(\frac{7}{3}\right)^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{\frac{7}{3}}$

37 - $\lim_{x \to 2} \frac{senhx}{4} = \frac{senh2}{4}$.