3.16 – EXERCÍCIOS – pg. 103

1. Determinar as assíntotas horizontais e verticais do gráfico das seguintes funções:

(a) $f(x)=\dfrac{4}{x-4}$

$\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{4}{x-4}=0$. Portanto $y=0$ é uma assíntota horizontal.

$\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{4}{x-4}=\infty$. Portanto $x=4$ é uma assíntota vertical.

(b) $f(x)=\dfrac{-3}{x+2}$

$\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{-3}{x+2}=0$. Portanto $y=0$ é uma assíntota horizontal.

$\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{-3}{x+2}=\infty$. Portanto $x=-2$ é uma assíntota vertical.

(c) $f(x)=\dfrac{4}{x^2-3x+2}$

$\lim\limits_{x\to\infty}=\dfrac{4}{x^2-3x+2}=0 \quad\Rightarrow\quad y=0$ é uma assíntota horizontal.

$\lim\limits_{x\to 2}=\dfrac{4}{x^2-3x+2}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{4}{(x-2)(x-1)}=\infty$, assim, $x=2$ é uma assíntota vertical.

$\lim\limits_{x\to 1}=\dfrac{4}{x^2-3x+2}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{4}{(x-2)(x-1)}=\infty$, assim, $x=1$ é uma assíntota vertical.

d) $f(x)=\dfrac{-1}{(x-3)(x+4)}$

$\lim\limits_{x\to\infty}=\dfrac{-1}{(x-3)(x+4)}=0 \quad\Rightarrow\quad y=0$ é uma assíntota horizontal.

$\lim\limits_{x\to 3}=\dfrac{-1}{(x-3)(x+4)}=\infty$, assim, $x=3$ é uma assíntota vertical.

$\lim\limits_{x\to -4}=\dfrac{-1}{(x-3)(x+4)}=\infty$, assim, $x=-4$ é uma assíntota vertical.

e) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x+4}}$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{\sqrt{x+4}} = 0 \quad \Rightarrow \quad y = 0 \text{ é assíntota horizontal.}$$

$$\lim_{x\to -4} \frac{1}{\sqrt{x+4}} = \infty \quad \Rightarrow \quad x = -4 \text{ é assíntota vertical.}$$

f) $f(x) = \dfrac{-2}{\sqrt{x-3}}$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2}{\sqrt{x-3}} = 0 \quad \Rightarrow \quad y = 0 \text{ é assíntota horizontal.}$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{-2}{\sqrt{x-3}} = \infty \quad \Rightarrow \quad x = 3 \text{ é assíntota vertical.}$$

g) $f(x) = \dfrac{2x^2}{\sqrt{x^2-16}}$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2x^2}{\sqrt{x^2-16}} = \infty \quad \Rightarrow \quad \text{Não existe assíntota horizontal.}$$

$$\lim_{x\to +4} f(x) = \infty$$

$$\lim_{x\to -4} f(x) = \infty$$

Assim, $x = 4$ e $x = -4$ são assíntotas verticais.

h) $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+x-12}}$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+x-12}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{x}{x}}{\sqrt{\frac{x^2}{x^2}+\frac{x}{x^2}-\frac{12}{x^2}}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x}-\frac{12}{x^2}}} = 1$$

e $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+x-12}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{x}{x}}{-\sqrt{\frac{x^2}{x^2}+\frac{x}{x^2}-\frac{12}{x^2}}} = -1$

Assim, $y = 1$ e $y = -1$ são assíntotas horizontais.

$\displaystyle\lim_{x\to 3} \frac{x}{\sqrt{x^2+x-12}} = \lim_{x\to 3} \frac{x}{\sqrt{(x-3)(x+4)}} = \infty$ e

$$\lim_{x\to -4} \frac{x}{\sqrt{x^2+x-12}} = \lim_{x\to -4} \frac{x}{\sqrt{(x-3)(x+4)}} = \infty$$

Portanto, $x = 3$ e $x = -4$ são assíntotas verticais.

i) $f(x)=e^{1/x}$

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} e^{1/x}=1 \quad \Rightarrow \quad y=1$ é uma assíntota horizontal.

$\lim\limits_{x\to 0^+} e^{1/x}=\infty \quad \Rightarrow \quad x=0$ é uma assíntota vertical.

j) $f(x)=e^x-1$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(e^x-1\right)=\infty$ e $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(e^x-1\right)=-1 \quad \Rightarrow \quad y=-1$ é assíntota horizontal

$\nexists$ assíntota vertical.

k) $y=\ln x$

$\lim\limits_{x\to\infty}\ln x=\infty$

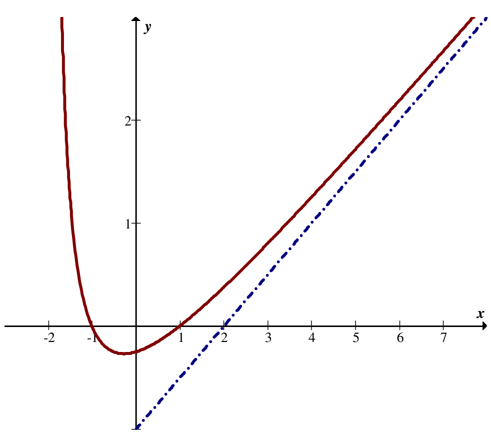
$\lim\limits_{x\to 0^+}(\ln x)=-\infty$, assim $x=0$ é uma assíntota vertical.

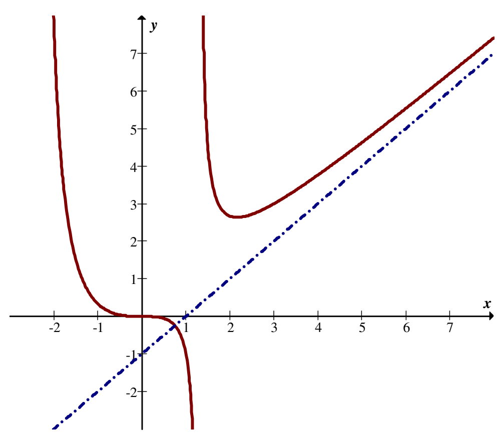
l) $f(x)=tgx$

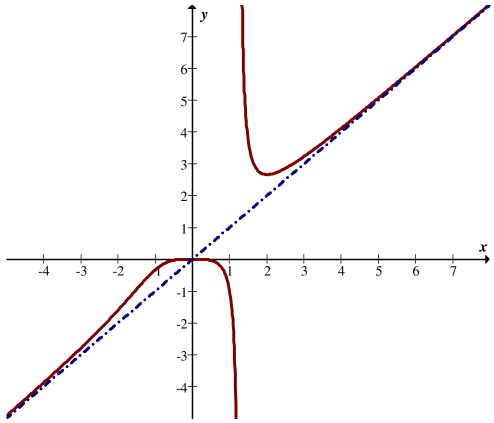
$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}+2n} tgx=\pm\infty$ com $n=0,\pm1,\pm2,\ldots$, assim $x=\dfrac{\pi}{2}+2n$, para $x=0,\pm1,\pm2,\pm3,\ldots$ são assíntotas verticais.

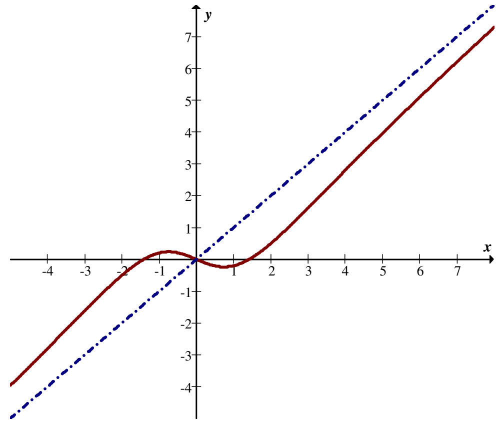
2. Constatar, desenvolvendo exemplos graficamente, que as funções racionais do tipo $f(x)=\dfrac{p(x)}{q(x)}$ com $p(x)$ e $q(x)$ polinômios tais que a diferença entre o grau do numerador e o grau de denominador é igual 1 possuem assíntotas inclinadas.

Seguem alguns gráficos que mostram a afirmação:



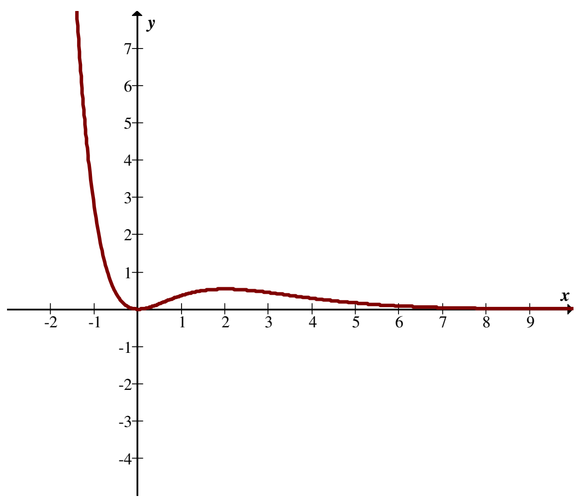






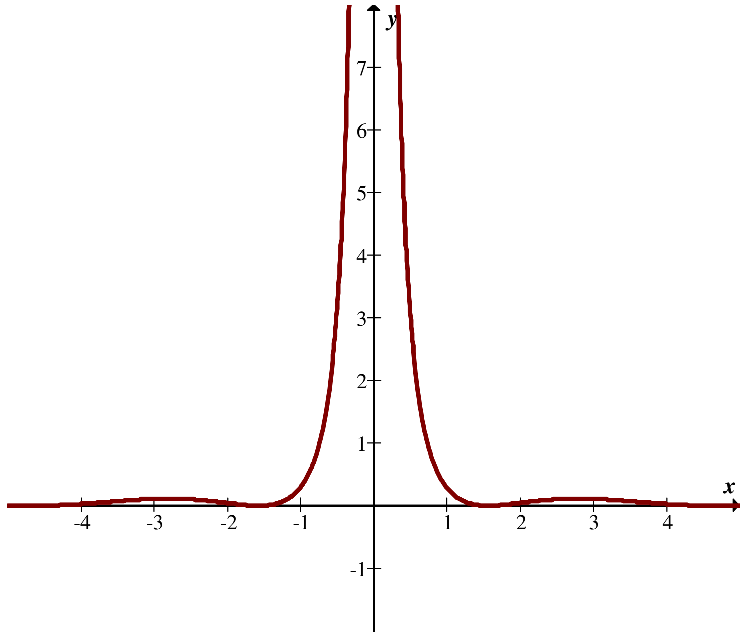
(3) Analisar graficamente a existência de assíntotas para as seguintes funções

(a) $f(x) = \dfrac{x^2}{e^x}$.



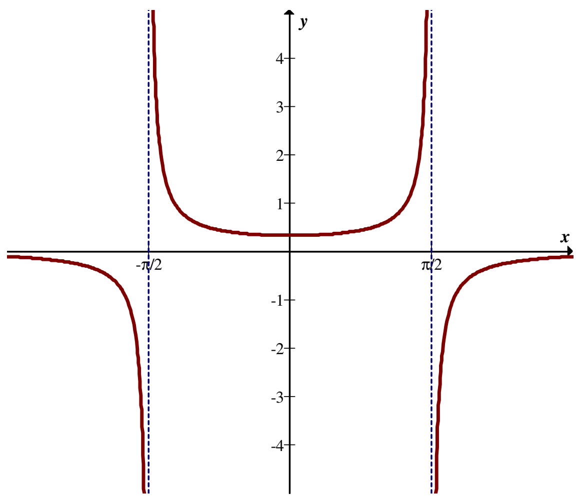
Temos que y=0 é uma assíntota horizontal.

(b) $f(x) = \dfrac{\cos^2 x}{x^2}$



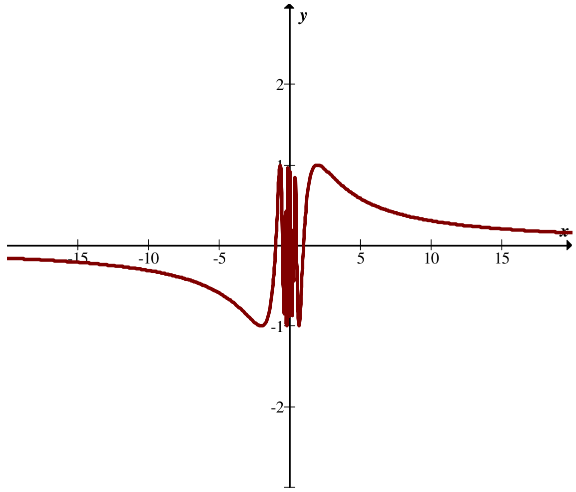
Observa-se que *y=0* é uma assíntota horizontal e *x=0* é uma assíntota vertical.

(c) $f(x) = \dfrac{tgx - x}{x^3}$



Na região considerada temos duas assíntotas verticais em $x = -\dfrac{\pi}{2}$ e em $x = \dfrac{\pi}{2}$. Mas se ampliarmos o gráfico vamos observar outras assíntotas verticais.

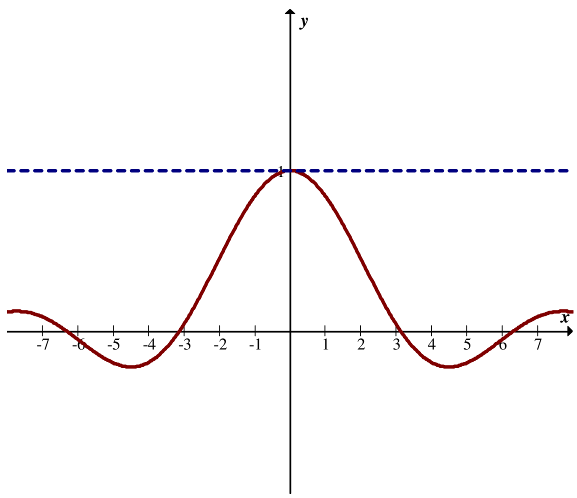
(d) $f(x) = sen\left(\dfrac{\pi}{x}\right)$



É possível observar que *y=0* é uma assíntota horizontal.

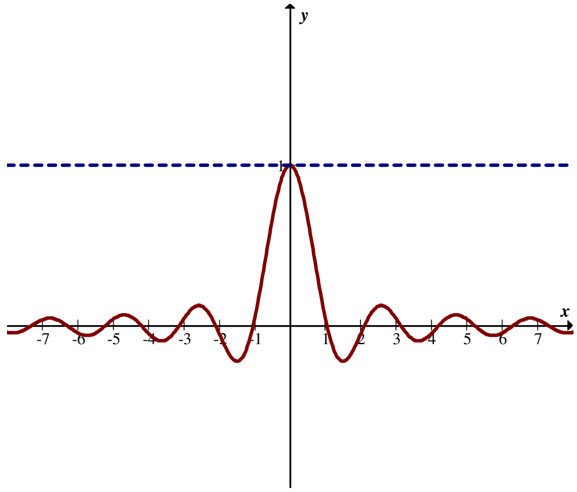
(4) Fazer o gráfico das funções seguintes e determinar os respectivos limites. Para melhor visualização, traçar, também, o gráfico das retas indicadas. A seguir, determinar analiticamente os limites dados e comparar os resultados.

(a) $f(x) = \dfrac{senx}{x}$ e $y = 1$; $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$



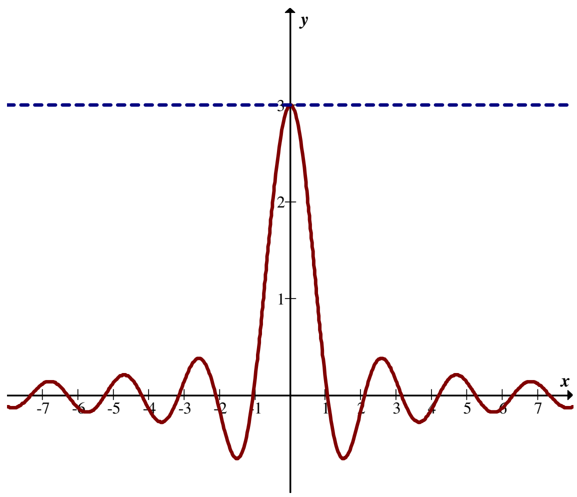
$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{senx}{x} = 1$.

(b) $f(x) = \dfrac{sen3x}{3x}$ e $y = 1$; $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$



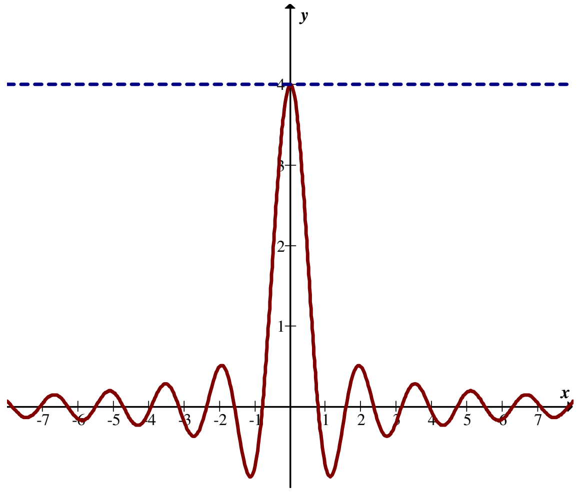
$\lim_{x \to 0} \frac{sen3x}{3x} = 1$.

(c) $f(x) = \frac{sen3x}{x}$ e $y = 3$; $\lim_{x \to 0} f(x)$



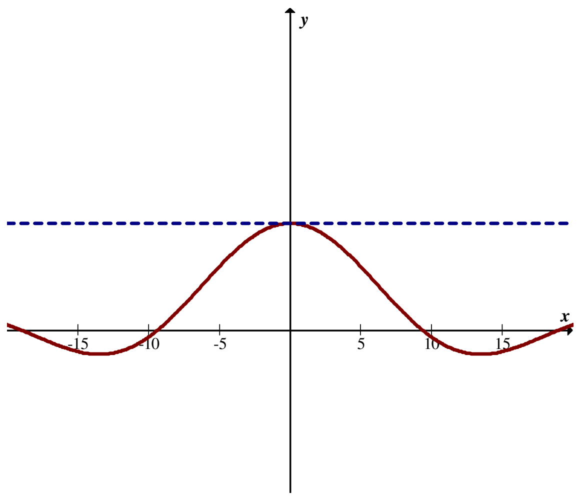
$\lim_{x \to 0} \frac{sen3x}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{3sen3x}{3x} = 3\lim_{x \to 0} \frac{sen3x}{3x} = 3 \times 1 = 3$.

d) $f(x) = \frac{sen4x}{x}$ e $y = 4$; $\lim_{x \to 0} f(x)$



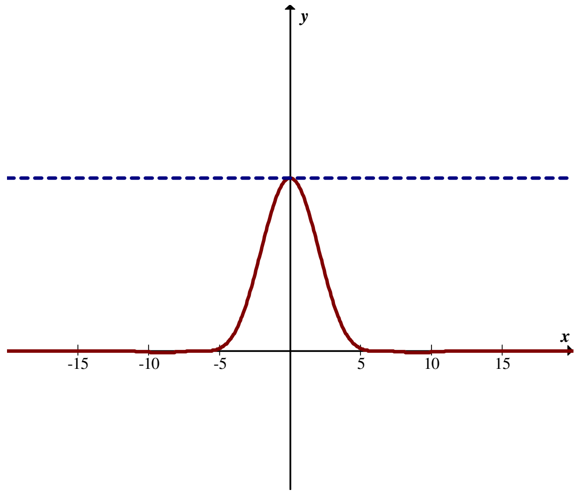
$$\lim_{x\to 0}\frac{sen4x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{4sen4x}{4x}=4\lim_{x\to 0}\frac{sen4x}{4x}=4\times 1=4\,.$$

e) $f(x)=\dfrac{sen1/3x}{x}$ e $y=1/3$; $\lim_{x\to 0} f(x)$



$$\lim_{x\to 0}\frac{sen1/3x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{1/3sen1/3x}{1/3x}=\frac{1}{3}\lim_{x\to 0}\frac{sen1/3x}{1/3x}=\frac{1}{3}\times 1=\frac{1}{3}\,.$$

a) $f(x)=\dfrac{sen^3(x/2)}{x^3}$ e $y=1/8$; $\lim_{x\to 0} f(x)$



$$\lim_{x\to 0}\frac{sen^3(x/2)}{x^3}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{sen(x/2)}{x}\right)^3=\left(\lim_{x\to 0}\frac{1/2sen(x/2)}{x/2}\right)^3=\left(\frac{1}{2}\times 1\right)^3=\frac{1}{8}.$$

Nos exercícios 5 a 27, calcule os limites aplicando os limites fundamentais.

5. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{sen9x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{9sen9x}{9x}=9\cdot 1=9$.

6. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{sen4x}{3x}=\frac{4}{3}\quad\lim\limits_{x\to 0}\frac{sen4x}{4x}=\frac{4}{3}\cdot 1=\frac{4}{3}$.

7. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{sen10x}{sen7x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{10\cdot sen10x}{10x}\cdot\frac{7x}{7sen7x}=10\cdot 1\cdot\frac{1}{7}\cdot 1=\frac{10}{7}$.

8. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{sen\,ax}{sen\,bx}, b\neq 0$

Se $a=0$, temos $\lim\limits_{x\to 0}\frac{0}{senbx}=0$.

Se $a\neq 0$, temos

$$\lim_{x\to 0}\frac{sen\,ax}{sen\,bx}=\lim_{x\to 0}\frac{a\,sen\,ax}{a\cdot x}\cdot\frac{bx}{b\,sen\,bx}=a\cdot 1\cdot\frac{1}{b}\cdot 1=\frac{a}{b}.$$

9. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{tg\,ax}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{sen\,ax}{ax}\cdot\frac{a}{\cos ax}=1.\frac{a}{1}=a,\ a\neq 0$.

Para $a=0,\ \lim\limits_{x\to 0}\frac{tg\,ax}{x}=0$

10. $\lim\limits_{x\to -1}\frac{tg^3\frac{x+1}{4}}{(x+1)^3}$

Fazemos $u = x+1$. $x \to -1 \Rightarrow u \to 0$. Substituindo no limite, vem

$$\lim_{x\to -1}\frac{tg^3\frac{x+1}{4}}{(x+1)^3} = \lim_{u\to 0}\frac{tg^3\frac{u}{4}}{u^3} = \lim_{u\to 0}\frac{1}{4^3}\frac{sen^3\frac{u}{4}}{\left(\frac{u}{4}\right)^3}.\frac{1}{\cos^3\frac{u}{4}} = \frac{1}{64}.1.1 = \frac{1}{64}.$$

11. $$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{2\left(sen^2\frac{x}{2}\right)\frac{x}{4}}{\frac{x\cdot x}{4}} = 0\cdot 1 = 0.$$

12. $$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{2sen^2\frac{x}{2}}{x^2} \qquad \boxed{2sen^2\frac{x}{2} = 1-\cos x}$$

$$= 2\left(\lim_{x\to 0}\frac{sen\frac{x}{2}}{2\cdot\frac{x}{2}}\right)^2 = 2\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot 1\right)^2 = 2\cdot\frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

13. $$\lim_{x\to 3}(x-3).\cos ec\,\pi\, x = \lim_{x\to 3}(x-3)\cdot\frac{1}{sen\,\pi\, x} = \lim_{x\to 3}\frac{x-3}{sen\,\pi\, x} = \lim_{x\to 3}\frac{-(3-x)\pi}{\pi\, sen\,\pi(3-x)} = -\frac{1}{\pi}$$

$$\boxed{sen\,\pi\, x = sen\,(3\pi-\pi x) = sen\,\pi(3-x)}$$

14. $$\lim_{x\to 0}\frac{6x-sen2x}{2x+3sen4x} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{6x}{x}-\frac{2sen2x}{2x}}{\frac{2x}{x}+\frac{(3sen4x)4}{4x}} = \frac{6-2\cdot 1}{2+3\cdot 1\cdot 4} = \frac{2}{7}$$

15. $$\lim_{x\to 0}\frac{\cos 2x - cox3x}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{1-2sen^2x-\left(1-2sen^2\frac{3x}{2}\right)}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{-2sen^2x+2sen^2\frac{3x}{2}}{x^2} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{-2sen^2x}{x^2}+\frac{2sen^2\frac{3x}{2}}{x^2} = -2\left(\lim_{x\to 0}\frac{senx}{x}\right)^2 + 2\left(\lim_{x\to 0}\frac{3\cdot sen\frac{3x}{2}}{2\cdot\frac{3x}{2}}\right)^2 = -2\cdot 1^2 + 2\cdot\left(\frac{3}{2}\cdot 1\right)^2$$

$$= \frac{5}{2}.$$

16. $$\lim_{x\to 0}\frac{1-2\cos x+\cos 2x}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{1-2\left(1-2sen^2\frac{x}{2}\right)+(1-2sen^2x)}{x^2} =$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1-2+4sen^2\frac{x}{2}+1-2sen^2x}{x^2}=4\left(\lim_{x\to 0}\frac{sen\frac{x}{2}}{2\cdot\frac{x}{2}}\right)^2-2\left(\lim_{x\to 0}\frac{senx}{x}\right)^2=4\cdot\left(\frac{1}{2}.1\right)^2-2\cdot(1)^2=-1.$$

17. $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n+3}{2n+1}\right)^{n+1}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n+3}{2n+1}\right)^n\cdot\left(\frac{2n+3}{2n+1}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\frac{2n}{2n}+\frac{3}{2n}}{\frac{2n}{2n}+\frac{1}{2n}}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1+\frac{\frac{3}{3}}{\frac{2n}{3}}}{1+\frac{1}{2n}}\right)^n=$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{\frac{2n}{3}}\right)^{\frac{2n}{3}\cdot\frac{3}{2}}}{\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{\frac{2n}{2}}}=\frac{e^{\frac{3}{2}}}{e^{\frac{1}{2}}}=e\,.$$

18. $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(1+\frac{1}{tgx}\right)^{tgx}=e$. Usa-se a substituição $u=tgx$.

19. $\lim_{x\to\frac{3\pi}{2}}(1+\cos x)^{\frac{1}{\cos x}}=e$. Usa-se a substituição $u=\sec x$.

20. $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{10}{x}\right)^x=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{x}{10}}\right)^{\frac{x}{10}\cdot 10}=e^{10}$.

21. $\lim_{x\to 2}\frac{10^{x-2}-1}{x-2}=\ln 10$.

22. $\lim_{x\to -3}\frac{4^{\frac{x+3}{5}}-1}{5\cdot\frac{x+3}{5}}=\frac{1}{5}\ln 4=\frac{2}{5}\ln 2.$

23. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{5^x-25}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\dfrac{5^x}{5^2}-1}{\dfrac{x-2}{25}}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{5^{x-2}-1}{\dfrac{x-2}{25}}=25\ln 5$

24. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3^{\frac{x-1}{4}}-1}{sen 5(x-1)}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3^{\frac{x-1}{4}}-1}{4\cdot\dfrac{x-1}{4}}\cdot\dfrac{5(x-1)}{5 sen 5(x-1)}=\dfrac{1}{4}\cdot\ln 3\cdot\dfrac{1}{5}\cdot 1=\dfrac{\ln 3}{20}$

25. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\dfrac{e^{-ax}}{b^{-bx}}-1}{\dfrac{x}{e^{-bx}}}=\lim\limits_{x\to 0}e^{-bx}\left(\dfrac{e^{-ax+bx}-1}{x}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{(b-a)x}-1}{\dfrac{x(b-a)}{b-a}}=b-a$.

26. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tghax}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{ax}-e^{-ax}}{e^{ax}+e^{-ax}}\cdot\dfrac{1}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2ax}-1}{e^{2ax}+1}\cdot\dfrac{1}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2ae^{2ax}-1}{2ax}\cdot\dfrac{1}{e^{2ax}+1}=$

$=\dfrac{\cancel{2}a\ln e}{\cancel{2}}=a$.

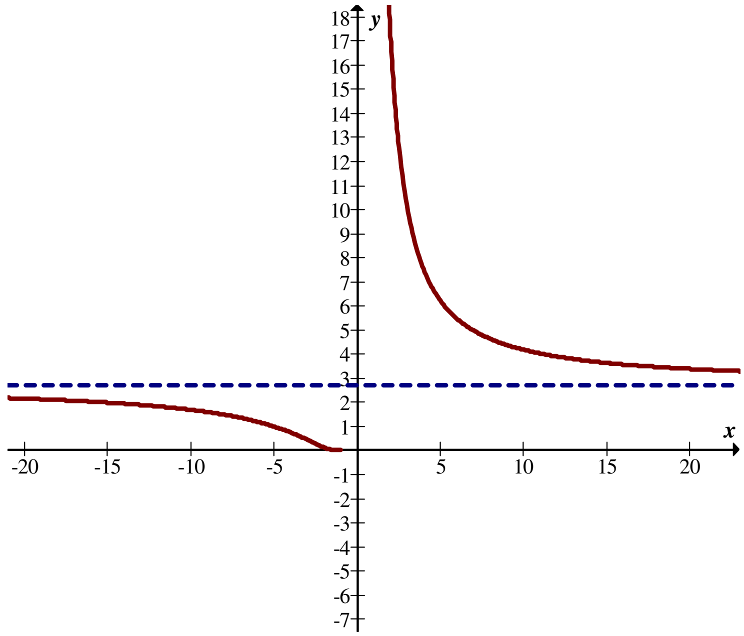
27. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{ax}-e^{bx}}{senax-senbx}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left(e^{(a-b)x}-1\right)e^{bx}}{(sen\,ax-sen\,bx)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left(e^{(a-b)x}-1\right)e^{bx}}{2sen\dfrac{(a-b)x}{2}\cdot\cos\dfrac{(a+b)x}{2}}=$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{e^{(a-b)x}-1}{\dfrac{x(a-b)}{(a-b)}}\cdot\dfrac{x\dfrac{a-b}{2}\cdot\dfrac{2}{a-b}}{sen\dfrac{(a+b)x}{2}}\dfrac{1}{\cos(a+b)\dfrac{x}{2}}\cdot e^{bx}=\dfrac{1}{2}\cdot(a-b)\cdot\dfrac{2}{a-b}=1$

28. Calcular $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ das funções dadas. Em seguida conferir graficamente os resultados encontrados.

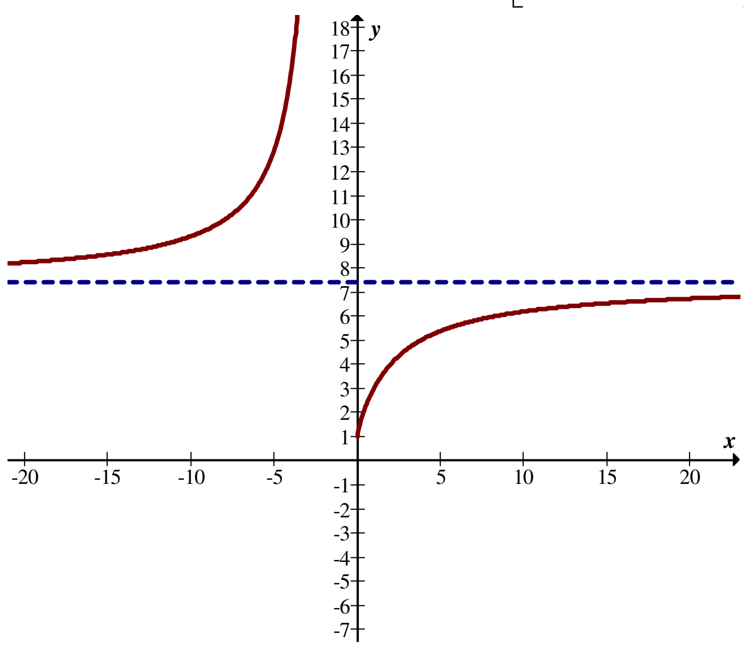
(a) $f(x)=\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x+5}$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x+5}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x}\times\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{5}=e\times 1=e$.



b) $f(x)=\left(1+\dfrac{2}{x}\right)^{x}$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^{x}=\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{2/2}{x/2}\right)^{x}=\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x/2}\right)^{(x/2)\times 2}=\left[\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x/2}\right)^{(x/2)}\right]^{2}=e^{2}.$$



c) $f(x)=\left(\dfrac{x}{1+x}\right)^{x}$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{1+x}\right)^x=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{\frac{1+x}{x}}\right)^x=\frac{1}{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x}=\frac{1}{e}.$$