3.18 – EXERCÍCIOS – pg. 112

1. Investigue a continuidade nos pontos indicados

(a) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{sen\ x}{x} & , x \neq 0 \\ 0 & , x=0 \end{cases}$ em $x=0$.

$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{sen\ x}{x} = 1 \neq f(0) = 0$. Portanto *f(x)* não é contínua em $x=0$.

(b) $f(x) = x - |x|$ em $x=0$.

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+}(x-x) = \lim\limits_{x\to 0^+} 0 = 0$.

$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-}(x+x) = \lim\limits_{x\to 0^-} 2x = 0$.

$\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0 = f(0)$. Portanto *f(x)* é contínua em $x=0$.

(c) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^3-8}{x^2-4} & , x \neq 2 \\ 3 & , \quad x=2 \end{cases}$ em $x=2$.

$\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^3-8}{x^2-4} = \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{(x-2)(x^2+2x+4)}{(x-2)(x+2)} = \dfrac{12}{4} = 3 = f(2)$. Portanto, a função é contínua em $x=2$.

(d) $f(x) = \dfrac{1}{sen\ 1/x}$ em $x=2$.

$\lim\limits_{x\to 2} = \dfrac{1}{sen\ 1/x} = \dfrac{1}{sen\ 1/2} = f(2)$. Portanto, a função é contínua em $x=2$.

(e) $f(x)=\begin{cases} x^2 sen\ 1/x & , x \neq 0 \\ 0 & , \quad x=0 \end{cases}$ em $x=0$.

Conforme exercício 16 da lista 3.6 item (c), temos

$\lim_{x\to 0} x^2 sen\, {}^1\!/_x = 0$. Como *f(0)=0*, a função é contínua em $x=0$.

(f) $f(x)=\begin{cases} 1-x^2 & , x<1 \\ 1-|x| & , x>1 \\ 1 \ , & x=1 \end{cases}$ em $x=1$.

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^-}(1-x^2)=0 \\ \lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1^+}(1-|x|)=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x\to 1} f(x)=0 \neq f(1)=1.$$

Portanto a função não é contínua em $x=1$.

(g) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2-4}{x-2} & , x\neq 2 \\ 0 & , x=2 \end{cases}$ em $x=2$.

$\lim_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{x-2}=\lim_{x\to 2}\dfrac{(x-2)(x+2)}{x-2}=4\neq f(2)=0$. Portanto, a função não é contínua em $x=2$.

(h) $f(x)=\begin{cases} x^2 & , x\geq -1 \\ 1-|x| & , x<-1 \end{cases}$ em $x=-1$.

$\lim_{x\to -1^+} f(x)=\lim_{x\to -1^+} x^2=1$

$\lim_{x\to -1^-} f(x)=\lim_{x\to -1^-}(1-|x|)=\lim_{x\to -1^-}(1+x)=0 \quad \therefore \quad \nexists \lim_{x\to -1} f(x)$ e a função não é contínua em *x=-1*.

(i) $f(x)=\dfrac{x^2-3x+7}{x^2+1}$ em $x=2$.

$\lim_{x\to 2}\dfrac{(x^2-3x+7)}{x^2+1}=\dfrac{4-6+7}{4+1}=1=f(2)$. Portanto a função é contínua em $x=2$.

(j) $f(x)=\dfrac{2}{3x^2+x^3-x-3}$ em $x=-3$.

A função dada não está definida para $x=-3$, assim não é contínua neste ponto.

2. Determine, se existirem, os valores de $x \in D(f)$, nos quais a função $f(x)$ não é contínua.

(a) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{x^2 - 1}, & x^2 \neq 1 \\ 0, & x = -1 \end{cases}$

Temos que em $x = -1$ a função não é contínua porque não existe $\lim\limits_{x \to -1} f(x)$.

(b) $f(x) = \dfrac{1 + \cos x}{3 + sen\ x}$

$3 + sen\ x \neq 0$ para todo $x \in (-\infty, +\infty)$. Portanto, a função não tem pontos em que não é contínua.

(c) $f(x) = \dfrac{x - |x|}{x} = \begin{cases} \dfrac{x - x}{x} = \dfrac{0}{x} = 0 & , x > 0 \\ \dfrac{x + x}{x} = \dfrac{2x}{x} = 2 & , x < 0 \end{cases}$

A função não tem pontos em que não é contínua em seu domínio: $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$.

(d) $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2 + 5x + 6}, & x < -3\ e\ x > -2 \\ -1 & , -3 \leq x \leq -2 \end{cases}$

Esta função não é contínua nos pontos -3 e -2.

(e) $f(x) = \begin{cases} 1 - \cos x & , x < 0 \\ x^2 + 1 & , x \geq 0 \end{cases}$

$\lim\limits_{x \to 0^+} (x^2 + 1) = 1$

$\lim\limits_{x \to 0^-} (1 - \cos x) = 0$

Portanto, não existe $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ e a função não é contínua em $x = 0$.

(f) $f(x) = \dfrac{2}{e^x - e^{-x}}$

Esta função é contínua em todo o seu domínio: $\Re - \{0\}$.

(g) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 3x + 4}{x - 1}, & x \neq 1 \\ 1 & , x = 1 \end{cases}$

Temos que:

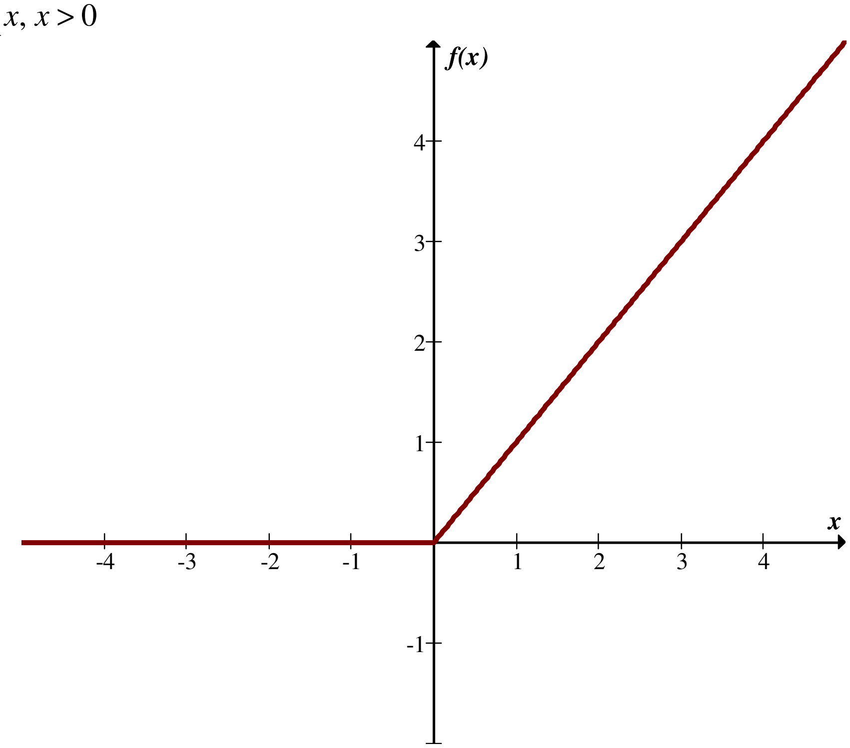
$\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 - 3x + 4}{x - 1} = \infty$. Portanto, *f* não é contínua em *x=1*.

(h) $f(x) = \dfrac{x}{x + \pi}$

A função é contínua em todos os pontos de seu domínio: $\Re - \{-\pi\}$

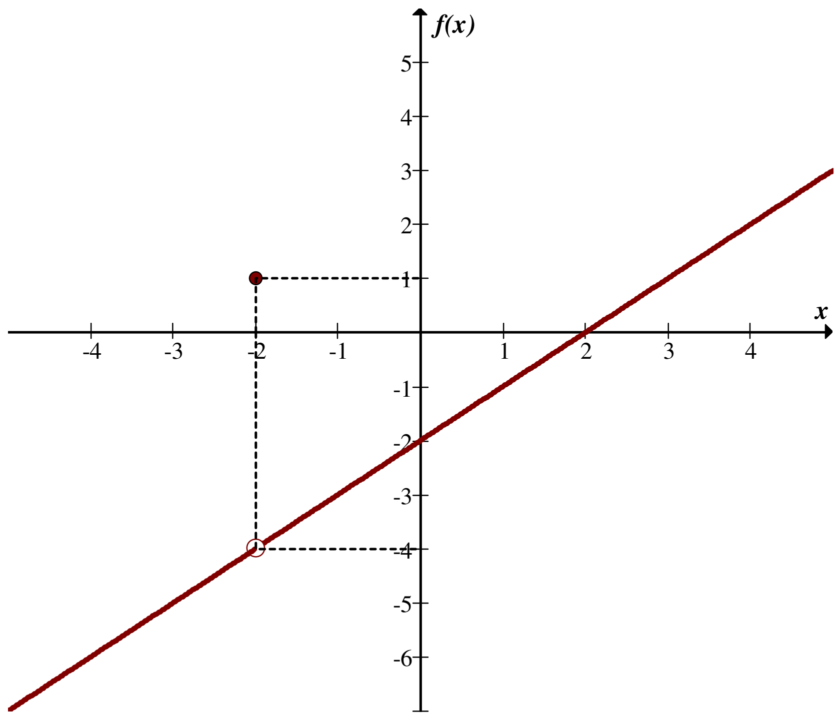
3. Construa o gráfico e analise a continuidade das seguintes funções:

(a) $f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ x, & x > 0 \end{cases}$



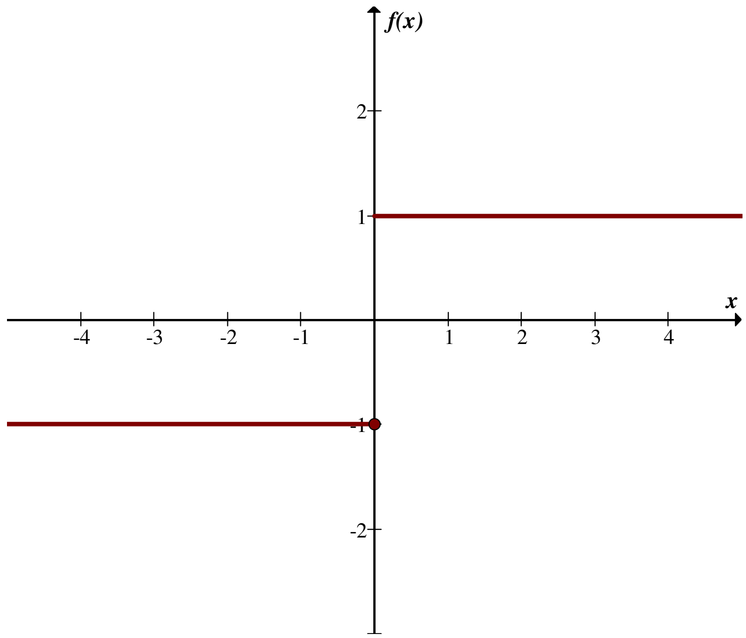
Analisando o gráfico visualiza-se uma função contínua em todo o seu domínio, ou seja, em todo o conjunto dos números reais.

(b) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 4}{x + 2}, & x \neq -2 \\ 1 & , x = -2 \end{cases}$



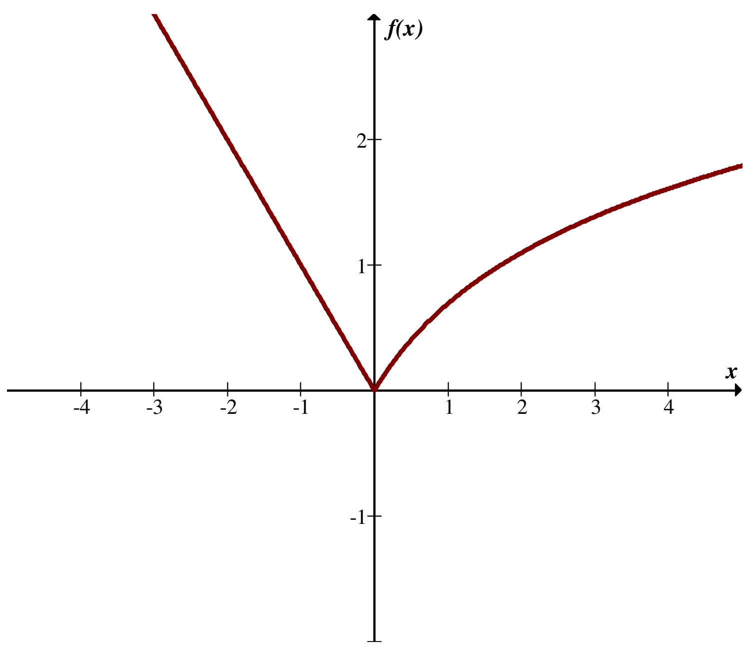
A visualização gráfica mostra que a função não é contínua em $x = -2$.

(c) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{|x|}, & x \neq 0 \\ -1, & x = 0 \end{cases}$



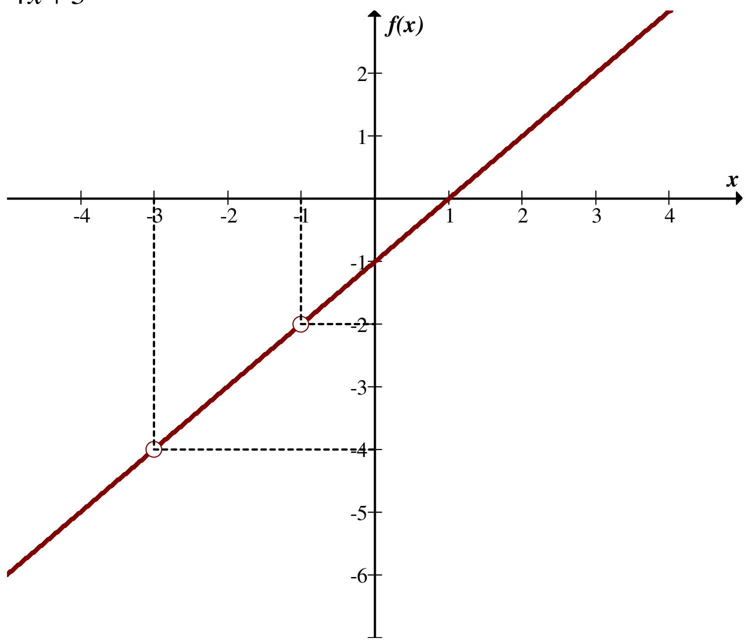
A visualização gráfica mostra que a função não é contínua em $x = 0$.

(d) $f(x) = \begin{cases} \ln(x+1), & x \geq 0 \\ -x \quad , & x < 0 \end{cases}$



A visualização mostra que a função é contínua em todos os pontos do seu domínio, ou seja, em todo o conjunto dos números reais.

(e) $f(x)=\dfrac{x^3+3x^2-x-3}{x^2+4x+3}$



A visualização gráfica mostra que a função não é contínua em $x=-3$ e em $x=-1$. Observa-se que esses pontos não pertencem ao domínio dessa função. Assim, temos a continuidade em todos os pontos do domínio.

4. Calcule p de modo que as funções abaixo sejam contínuas.

(a) $f(x)=\begin{cases} x^2+px+2 & , x\neq 3 \\ 3 & , x=3 \end{cases}$

Devemos ter:

$\lim\limits_{x\to 3}\left(x^2+px+2\right)=11+\lim\limits_{x\to 3} px = f(3)=3$.

Assim,

$\lim\limits_{x\to 3} px = 3-11$

$\lim\limits_{x\to 3} px = -8$

$3p=-8$

$p=\dfrac{-8}{3}$.

(b) $f(x)=\begin{cases} x+2p & , x\leq -1 \\ p^2 & , x>-1 \end{cases}$

Temos que:

$\lim\limits_{x \to -1^+} p^2 = p^2$

$\lim\limits_{x \to -1^-} (x + 2p) = -1 + 2p$

Para que o limite exista devemos ter a relação:

$p^2 = -1 + 2p$

$p^2 - 2p + 1 = 0$

$p = \dfrac{2 \pm \sqrt{4-4}}{2} = \dfrac{2 \pm 0}{2} = 1.$

(c) $f(x) = \begin{cases} e^{2x}, & x \neq 0 \\ p^3 - 7, x = 0 \end{cases}$

Temos que $\lim\limits_{x \to 0} e^{2x} = 1$. Assim devemos ter $p^3 - 7 = 1$ ou $p = 2$.

5. Determine, se existirem, os pontos onde as seguintes funções não são contínuas.

(a) $f(x) = \dfrac{x}{(x-3)(x+7)}$

Neste caso temos os pontos que não pertencem ao domínio da função: $x = 3$ e $x = -7$.

(b) $f(x) = \sqrt{(x-3)(6-x)}$

$(x-3)(6-x) \geq 0$

Neste caso a função não é contínua em $x \in (3,6)$, pois esses pontos não pertencem ao domínio da função.

(c) $f(x) = \dfrac{1}{1 + 2\, sen\, x}$

Esta função não é contínua nos pontos em que $sen\, x = \dfrac{-1}{2}$, ou seja, em

$$\begin{cases} x_{1k} = -\dfrac{\pi}{6} + 2k\pi\ , k \in Z \\ x_{2k} = \dfrac{7\pi}{6} + 2k\pi\ , k \in Z \end{cases}$$

(d) $f(x)=\dfrac{x^2+3x-1}{x^2-6x+10}$

É contínua em todo o seu domínio, ou seja, em todo o conjunto dos números reais.

6. Prove que se $f(x)$ e $g(x)$ são contínuas em $x_0=3$, também o são $f+g$ e $f\,.\,g$.

Se $f(x)$ é contínua em $x=3$ então $\exists\, f(3)$, $\exists \lim\limits_{x\to 3} f(x)$ e $\lim\limits_{x\to 3} f(x)=f(3)$ (1)

Se $g(x)$ é contínua em $x=3$ então $\exists\, g(3)$, $\exists \lim\limits_{x\to 3} g(x)$ e $\lim\limits_{x\to 3} g(x)=g(3)$ (2)

Temos que

$$\lim_{x\to 3}(f+g)=\lim_{x\to 3} f(x)+\lim_{x\to 3} g(x)=f(3)+g(3)=(f+g)(3)$$
$$\lim_{x\to 3} f\,.\,g=\lim_{x\to 3} f(x)\,.\lim_{x\to 3} g(x)=f(3)\,.\,g(3)=(f\,.\,g)\,.(3).$$

7. Defina funções *f, g* e *h* que satisfaçam:

(a) *f* não é contínua em 2 pontos de seu domínio;

(b) *g* é contínua em todos os pontos de seu domínio mas não é contínua em IR;

(c) $h_0 f$ é contínua em todos os pontos do domínio de *f.*

Podemos ter infinitas respostas para o presente exercício. Segue um exemplo para cada uma das funções:

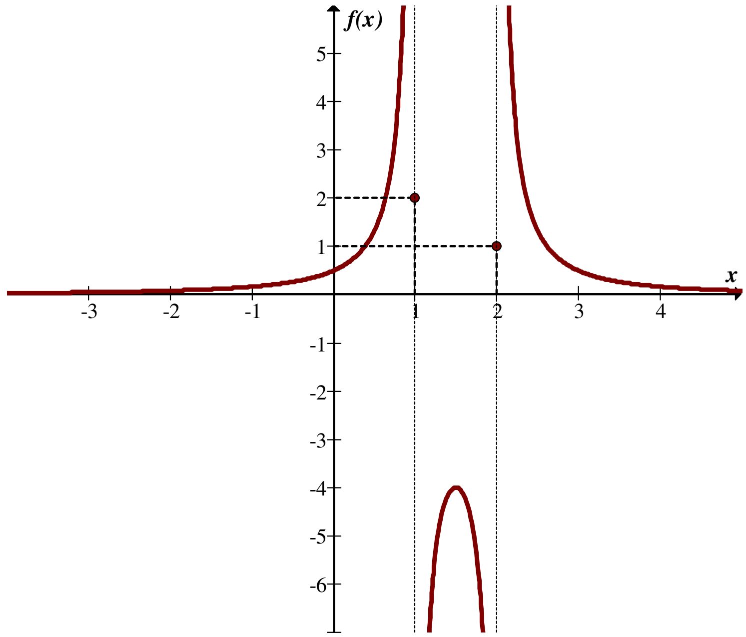
$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{(x-1)(x-2)}, & x\neq 1\ e\ x\neq 2\\ 2, & x=1\\ 1, & x=2\end{cases}$$

$$g(x)=\frac{1}{x+2}$$

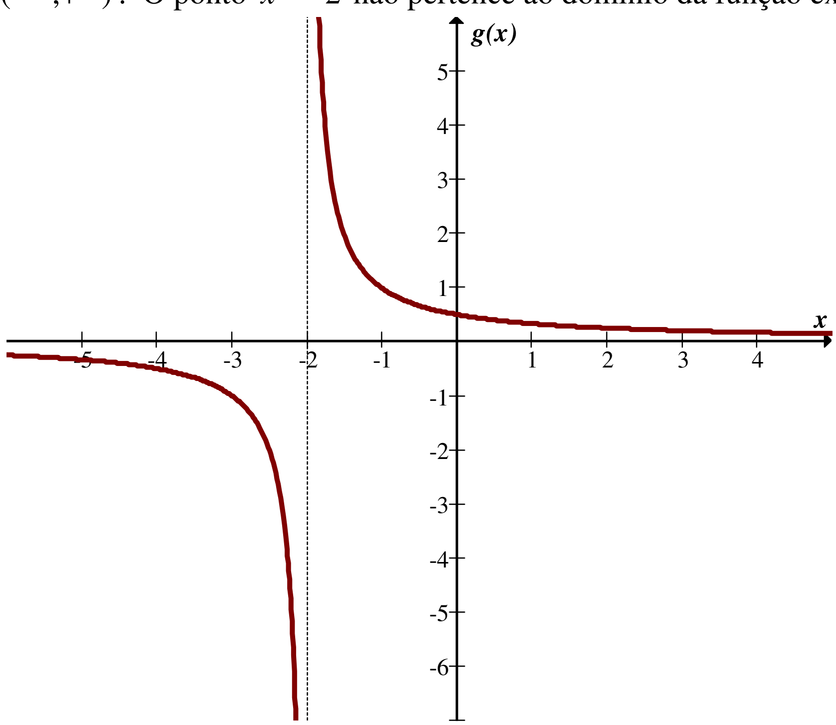
$$h(x)=x$$

Para as funções exemplificadas temos que $h \circ f = h[f(x)] = f(x)$. Essas funções satisfazem as condições dadas nos três itens e podem ser visualizadas a seguir.

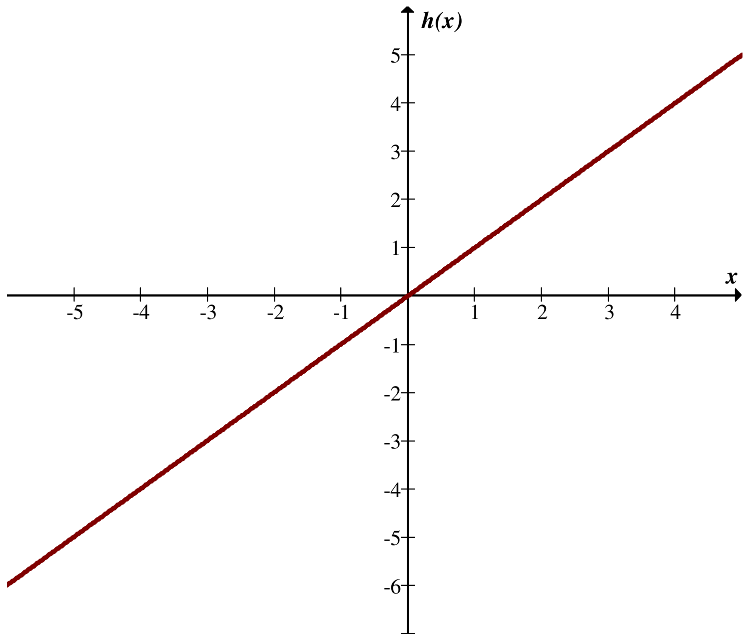
(a) Gráfico da função $f(x)$ definida em $(-\infty,+\infty)$ e contínua em $(-\infty,+\infty)$ -$\{1,2\}$.



(b) Gráfico da função $g(x)$ contínua em todos os pontos de seu domínio, mas não é contínua em $(-\infty,+\infty)$. O ponto $x = -2$ não pertence ao domínio da função exemplificada.



(c) Gráfico da função $h(x) = x$, cuja composição com a função $f(x)$ resulta a própria função $f(x)$.



8.Dê exemplo de duas funções f e g que não são contínuas no ponto $a=0$ e tais que $h = f \cdot g$ é contínua neste ponto. Faça o gráfico das funções f, g e h.

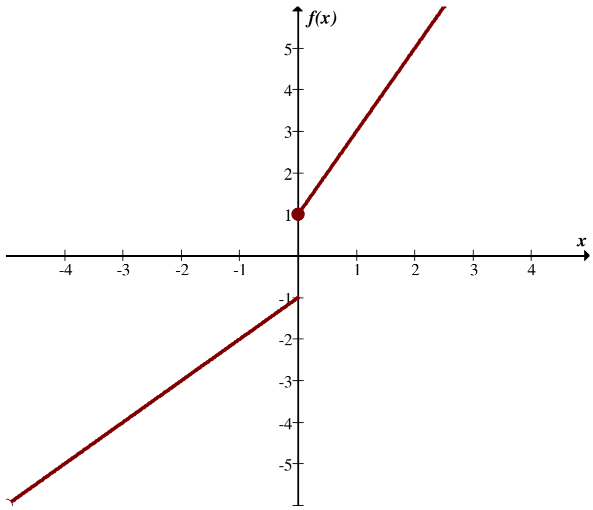
Existem infinitos exemplos. Segue um deles:

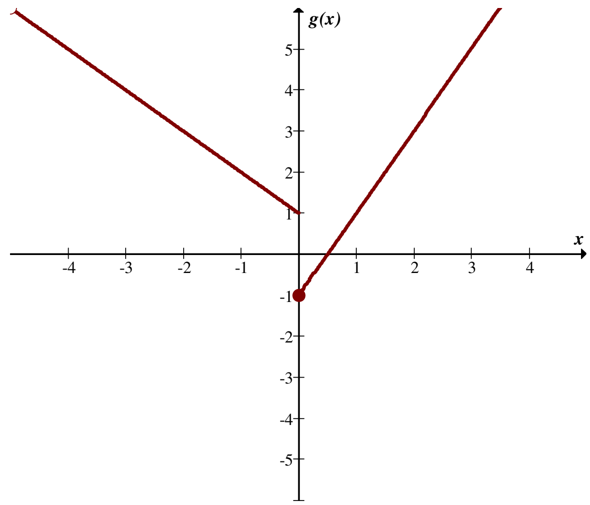
$$f(x) = \begin{cases} 2x+1\,,\ x \geq 0 \\ x-1\,, x < 0 \end{cases}$$

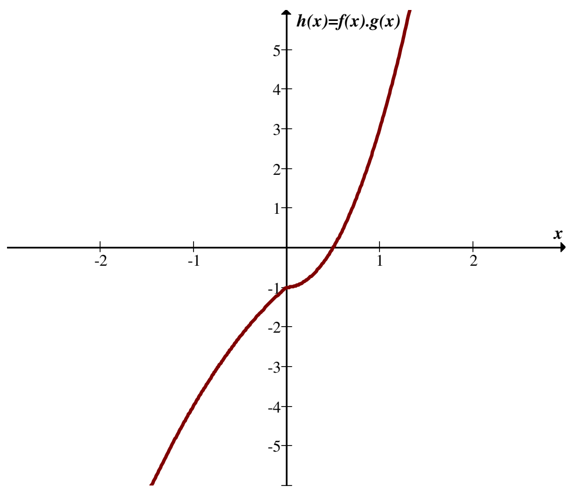
$$g(x) = \begin{cases} 2x-1\,,\ x \geq 0 \\ -x+1\,, x < 0 \end{cases}$$

$$h(x) = \begin{cases} 4x^2-1\,,\ x \geq 0 \\ -x^2+2x-1, x < 0 \end{cases}$$

Esboço dos gráficos.







9. Sejam *f, g* e *h* funções tais que, para todos *x*, $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$. Se *f* e *h* são contínuas no ponto $x = a$ e $f(a) = g(a) = h(a)$, prove que g é contínua no ponto *a*.

Se *f* e *h* são contínuas no ponto $x = a$, temos que:

$\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$

$\lim\limits_{x \to a} h(x) = h(a)$

Como $f(a) = h(a)$ temos que $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{x \to a} h(x)$.

Usando o Teorema do Confronto, considerando que $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$, existe $\lim\limits_{x \to a} g(x) = f(a) = h(a) = g(a)$. Isto garante a continuidade da função $g(x)$ em $x = a$.

10. Sejam $a \in IR$ e $f : IR \to IR$ uma função definida no ponto *a*. Se $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} = m$, prove que *f* é contínua no ponto *a*.

Para que a função *f* seja contínua no ponto *a* devemos ter que $\lim_{x \to 1} f(x) = f(a)$, ou que $\lim_{x \to a}(f(x) - f(a)) = 0$.

Temos,

$$\lim_{x \to a}(f(x) - f(a)) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \cdot (x - a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \cdot \lim_{x \to a}(x - a) = m \cdot 0 = 0 .$$