5.3 – EXERCÍCIO – pg. 191

1. Numa granja experimental, constatou-se que uma ave em desenvolvimento pesa em gramas

$$W(t) = \begin{cases} 20 + \frac{1}{2}(t+4)^2 & , 0 \le t \le 60 \\ 24,4t + 604 & , 60 \le t \le 90, \end{cases}$$

onde t é medido em dias.

(a) Qual a razão de aumento do peso da ave quando $t = 50$?

$$\left.\frac{dw}{dt}\right|_{t=50} = \frac{1}{2} \,.\, 2(t+4)\Big|_{t=50}$$
$$= 50 + 4 = 54 \text{ gramas/dia}$$

(b) Quanto a ave aumentará no 51º dia?

$$w(51) - w(50)$$
$$= 20 + \frac{1}{2}(51+4)^2 - 20 - \frac{1}{2}(50+4)^2$$
$$= 54,5 \text{ gramas}$$

(c) Qual a razão de aumento do peso quando $t = 80$?

$$\left.\frac{dw}{dt}\right|_{t=80} = 24,4 \text{ gramas/dia}$$

2. Uma peça de carne foi colocada num freezer no instante $t = 0$. Após t horas, sua temperatura, em graus centígrados, é dada por:

$$T(t) = 30 - 5t + \frac{4}{t+1}, 0 \le t \le 5.$$

Qual a velocidade de redução de sua temperatura após 2 horas?

$$\frac{dT}{dt} = -5 + \frac{-4}{(t+1)^2}$$

$$\left.\frac{dT}{dt}\right|_{t=2h} = -5 + \frac{-4}{(2+1)^2} = -5 - \frac{4}{9}$$
$$= -5,444... \, {}^oC/h$$

3. A temperatura de um gás é mantida constante e sua pressão p em kgf/cm³ e volume v em cm³ estão relacionadas pela igualdade $vp = c$, onde c é constante. Achar a razão de variação do volume em relação à pressão quando esta vale 10 kgf/cm³.

$$vp = c \quad \Rightarrow \quad v = \frac{c}{p}$$

$$\frac{dv}{dp} = \frac{-c}{p^2}$$

$$\left.\frac{dv}{dp}\right|_{p=10} = \frac{-c}{10^2} = \frac{-c}{100}\ cm^3/kgf/cm^3$$

4. Uma piscina está sendo drenada para limpeza. Se o seu volume de água inicial era de 90.000 litros e depois de um tempo de t horas este volume diminuiu $2500\,t^2$ litros, determinar:

(a) tempo necessário para o esvaziamento da piscina;

Seja $v(t)$ o volume de água no instante *t.*

$$v(t) = 90000 - 2500t^2$$
$$v(t) = 0$$

$$2500\,t^2 = 90000$$

$$t^2 = \frac{90000}{2500} \Rightarrow t = \sqrt{\frac{900}{25}} = \frac{30}{5} = 6\ horas$$

(b) taxa média de escoamento no intervalo [2,5];

$$f(t) = 2500t^2$$

$$\frac{f(t+\Delta t) - f(t)}{\Delta t} = \frac{f(5) - f(1)}{3}$$
$$= \frac{2500\,.\,5^2 - 2500\,.\,2^2}{3}$$
$$= \frac{62500 - 10000}{3}$$
$$= \frac{52500}{3} = 1750\ l/hora$$

(c) taxa de escoamento depois de 2 horas do início do processo.

$$\frac{df}{dt} = 2500.2t = 5000t$$

$$\left.\frac{df}{dt}\right|_{t=2h} = 10000\ l/horas$$

5. Um apartamento está alugado por R$ 4.500,00. Este aluguel sofrerá um reajuste anual de R$ 1.550,00.

(a) Expresse a função com a qual podemos calcular a taxa de variação do aluguel, em t anos.

$f(t) = 4500{,}00 + 1.550{,}00t$.

(b) Calcule a taxa de variação do aluguel após 4 anos.

$f'(t)\big|_{t=4} = 1.550{,}00$.

(c) Qual a porcentagem de variação do aluguel depois de 1 ano do primeiro reajuste?

$$f(t) \to 100$$
$$f'(t) \to x$$

$$x = \frac{100.f'(t)}{f(t)}$$

$$x = \frac{100\,.1550{,}00}{4500{,}00 + 1550{,}00} = \frac{155000{,}00}{6050{,}00}$$

$$x = 25{,}6\%$$

(d) Que acontecerá à porcentagem de variação depois de alguns anos?

Tenderá para zero, pois:

$$\lim_{t\to\infty} = \frac{100.f'(t)}{f(t)} = 0.$$

6. Numa pequena comunidade obteve-se uma estimativa que daqui a t anos a população será de $\text{p}\,(\text{t}) = 20 - \dfrac{5}{\text{t}+1}$ milhares.

(a) Daqui a 18 meses, qual será a taxa de variação da população desta comunidade?

$$p(t) = 20 - \frac{5}{t+1}$$

$$p'(t) = \frac{+5}{(t+1)^2}$$

$$p'\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{+5}{\left(\frac{3}{2}+1\right)^2} = \frac{5}{\left(\frac{5}{2}\right)^2} =$$

$$= 5 \,.\, \frac{4}{25} = 0{,}8 \text{ milhares de pessoas/ano}$$

(b) Qual será a variação real sofrida durante o 18º mês?

$$p\left(\frac{18}{12}\right) - p\left(\frac{17}{12}\right)$$

$$= \left(20 - \frac{5}{\frac{3}{2}+1}\right) - \left(20 - \frac{5}{\frac{17}{12}+1}\right)$$

$$= \frac{-58+60}{29} = \frac{2}{29}$$

$$= 0{,}068965 \text{ milhares de pessoas}$$

7. Seja r a raiz cúbica de um número real x. Encontre a taxa de variação de r em relação a x quando x for igual a 8.

$$r = \sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}}$$

$$\frac{dr}{dx} = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}$$

$$\left.\frac{dr}{dx}\right|_{x=8} = \frac{1}{3}8^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3} \,.\, \frac{1}{(2^3)^{\frac{2}{3}}}$$

$$= \frac{1}{3} \,.\, \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$$

8. Um líquido goteja em um recipiente. Após t horas, há $5t - t^{1/2}$ litros no recipiente. Qual a taxa de gotejamento de líquido no recipiente, em 1/hora, quando $t = 16$ horas?

$$f(t) = 5t - t^{\frac{1}{2}}$$

$$\frac{df}{dt} = 5 - \frac{1}{2}t^{-\frac{1}{2}}$$

$$\left.\frac{df}{dt}\right|_{t=4} = 5 - \frac{1}{2}\ \frac{1}{\sqrt{16}} = 5 - \frac{1}{2}\ \frac{1}{4} = 5 - \frac{1}{8}$$

$$= \frac{40-1}{8} = \frac{39}{8} = 4{,}875\ \text{l/hora}$$

9. Um tanque tem a forma de um cilindro circular reto de 5 m de raio de base e 10 m de altura. No tempo $t = 0$, a água começa a fluir no tanque à razão de 25 m^3/h. Com que velocidade o nível de água sobe? Quanto tempo levará para o tanque ficar cheio?

Sejam:

$v = v(t)$ o volume de água no tanque;

$h = h(t)$ a altura da água no instante *t;*

r o raio da base.

Temos:

$$\frac{dv}{dt} = 25\ m^3/h$$

$$v = \pi r^2 h$$

$$h = \frac{v}{\pi r^2}$$

$$h = \frac{v}{\pi .25}$$

$$\frac{dh}{dv} = \frac{1}{\pi .25}$$

$$\frac{dh}{dt} = \frac{dh}{dv}.\frac{dv}{dt}$$

$$\frac{dh}{dt} = \frac{1}{\pi .25}.25$$

$$\frac{dh}{dt} = \frac{1}{\pi}\ \text{m/horas}$$

O nível da água sobe com uma velocidade de $\dfrac{1}{\pi}$ m/hora .

O volume do tanque é: $\pi r^2 h = \pi.5^2.10 = 250\pi$.

$25m^3 \leftrightarrow 1$ hora

$250\text{m}^3 \leftrightarrow x$ horas

Portanto, $x = 10\pi$ horas.

10. Achar a razão de variação do volume v de um cubo em relação ao comprimento de sua diagonal. Se a diagonal está se expandindo a uma taxa de 2 m/s, qual a razão de variação do volume quando a diagonal mede 3 m?

Sejam D a diagonal do cubo e x o seu lado. Da geometria elementar obtemos $D = \sqrt{3}x$ ou $x = \dfrac{1}{\sqrt{3}}D$. Temos

$$v = x^3 = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 D^3$$

$$\frac{dv}{dD} = \frac{3}{3\sqrt{3}}.D^2 = \frac{D^2}{\sqrt{3}} m^3 / m = m^2$$

$$\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dD}.\frac{dD}{dt} = \frac{D^2}{\sqrt{3}}.2 = \frac{2\,D^2}{\sqrt{3}}$$

$$\left.\frac{dv}{dt}\right|_{D=3} = \frac{2.3^2}{\sqrt{3}} = 6\sqrt{3}\ m^3 / seg$$

11. Uma usina de britagem produz pó de pedra, que, ao ser depositado no solo, forma uma pilha cônica onde a altura é aproximadamente igual a 4/3 do raio da base.

(a) Determinar a razão de variação do volume em relação ao raio da base.

$$h = \frac{4}{3}r \ ; \ v = \frac{1}{3}h\pi r^2 = \frac{4}{9}\pi r^3$$

$$\frac{dv}{dr} = \frac{4}{9}\pi.3r^2$$
$$= \frac{4\pi r^2}{3}$$

(b) Se o raio da base varia a uma taxa de 20 cm/s, qual a razão de variação do volume quando o raio mede 2 m?

$$\frac{dr}{dt} = 20\ m/s$$

$$\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dr} \cdot \frac{dr}{dt} = \frac{4\pi\, r^2}{3} . 20$$

$$\left.\frac{dv}{dt}\right|_{r=2} = \frac{4\pi . 200^2}{3} . 20 = \frac{80 . 40000}{3} . \pi = 1066666{,}6\ \pi\ cm^3/s$$

$$= 1{,}066\pi\ cm^3/s$$

12. Os lados de um triângulo eqüilátero crescem à taxa de 2,5 cm/s.

(a) Qual é a taxa de crescimento da área desse triângulo, quando os lados tiverem 12 cm de comprimento?

Sejam *A* a área e *l* o lado do triângulo.

$$\frac{dA}{dt} = \frac{dA}{dl} \cdot \frac{dl}{dt} \qquad \text{como } A = \frac{\sqrt{3}\, l^2}{4}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{4} . 2l . \frac{dl}{dt}$$

$$= \frac{l\sqrt{3}}{2} . 2{,}5$$

$$\left.\frac{dA}{dt}\right|_{l=12} = \frac{12\sqrt{3} . 2{,}5}{2} = \frac{30\sqrt{3}}{2}\ cm^2/seg$$

$$= 15\sqrt{3}\ cm^2/seg$$

(b) Qual é a taxa de crescimento do perímetro, quando os lados medirem 10 cm de comprimento?

Seja *P* o perímetro do triângulo.

$$\frac{dP}{dt} = \frac{dP}{dl} \cdot \frac{dl}{dt}$$

$$\frac{dP}{dl} = 3 . 2{,}5 \qquad P = 3l$$

$$= 7{,}5\ cm/seg$$

13. Um objeto se move sobre a parábola $y = 2x^2 + 3x - 1$ de tal modo que sua abscissa varia à taxa de 6 unidades por minuto. Qual é a taxa de variação de sua ordenada quando o objeto estiver no ponto $(0, -1)$?

$y = 2x^2 + 3x - 1$ $\qquad\qquad \dfrac{dx}{dt} = 6\, u / \min$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dt}$$
$$= (4x + 3) \cdot 6$$
$$\left.\frac{dy}{dt}\right|_{x=0} = (4.0 + 3) \cdot 6 = 18\, un / \min$$

14. Um trem deixa uma estação, num certo instante, e vai para a direção norte à razão de 80 km/h. Um segundo trem deixa a mesma estação 2 horas depois e vai na direção leste à razão de 95 km/h. Achar a taxa na qual estão se separando os dois trens 2 horas e 30 minutos depois do segundo trem deixar a estação.

O instante $t = 0$ corresponde à saída do segundo trem. Posicionando o primeiro trem sobre o eixo positivo dos *y* e o segundo sobre o eixo positivo dos *x*, num instante qualquer *t*, suas posições são dadas por:

$$y = 160 + 80t$$
$$x = 95t$$

A taxa na qual os dois trens estão se separando coincide com a taxa de crescimento da diagonal do triângulo xoy. Temos,

$$D^2 = x^2 + y$$
$$2D\frac{dD}{dt} = 2x\frac{dx}{dt} + 2y\frac{dy}{dt}$$
$$431{,}28441\frac{dD}{dt} = 237{,}5 \cdot 95 + 360 \cdot 80$$
$$\frac{dD}{dt} = \frac{22562{,}5 + 28800}{431{,}28441}$$
$$= \frac{51362{,}5}{431{,}28441}$$
$$= 119{,}09\, km / hora$$

15. Uma lâmpada colocada em um poste está a 4 m de altura. Se uma criança de 90 cm de altura caminha afastando-se da lâmpada à razão de 5 m/s, com que rapidez se alonga sua sombra?

Sejam:

y a distância da criança até o poste;

x a sombra da criança.

Temos:

Altura do poste = 4m;

Altura da criança=0,9m;

$$\frac{dy}{dt} = 5\ m/seg\ .$$

Usando semelhança de triângulos, vem:

$$\frac{x}{y+x} = 4$$

$$x = \frac{0{,}225}{0{,}775}\,y$$

Portanto,

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dx}{dy} \cdot \frac{dy}{dt} = \frac{0{,}225}{0{,}775}.5 \cong 1{,}45 m/seg\ .$$

16. O raio de um cone é sempre igual à metade de sua altura h . Determinar a taxa de variação da área da base em relação ao volume do cone.

Sejam:

A = área da base;

V = volume do cone;

h = altura do cone.

Temos:

$$\frac{dA}{dV} = \frac{dA}{dr} \cdot \frac{dr}{dV}$$

$$A = \pi r^2$$

$$V = \frac{\pi r^2 \ .\ h}{3} = \frac{\pi r^2 \ .\ 2r}{3}$$

$$V = \frac{2\pi r^3}{3}$$

$$r = \left(\frac{3V}{2\pi}\right)^{1/3}$$

$$\frac{dr}{dV} = \frac{1}{3}\left(\frac{3V}{2\pi}\right)^{-2/3} \cdot \frac{3}{2\,\pi}$$

$$\frac{dA}{dV} = \frac{2\pi r}{2\pi} \cdot \left(\frac{3V}{2\pi}\right)^{-\frac{2}{3}}$$

$$\frac{dA}{dV} = \left(\frac{3V}{2\pi}\right)^{\frac{1}{3}} \left(\frac{3V}{2\pi}\right)^{-\frac{2}{3}}$$

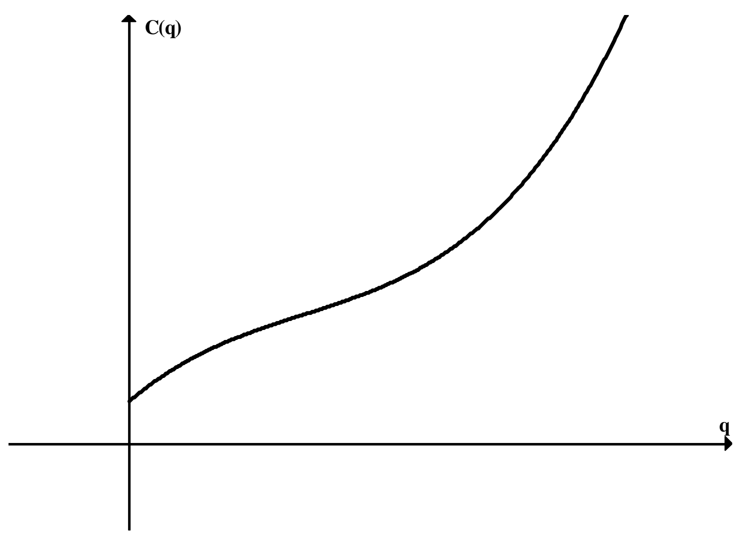
$$= \left(\frac{3V}{2\pi}\right)^{-\frac{1}{3}}$$

$$\frac{dA}{dV} = \left(\frac{2\pi}{3V}\right)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{\frac{2\pi}{3V}} \text{ unid.área/unid.vol.}$$

17. Supor que o custo total de produção de uma quantidade de um certo produto é dado pelo gráfico da figura que segue.

(a) Dar o significado de $C(0)$.
$C(0)$ corresponde a parcela de custo fixos.

(b) Descrever o comportamento do custo marginal.
O custo marginal vai diminuindo inicialmente e depois passa a aumentar.



18. O custo total $C(q)$ da produção de q unidades de um produto é dado por.

$$C(q) = \frac{1}{2}q^3 - 5q^2 + 10q + 120$$

(a) Qual é o custo fixo?

O custo fixo é 120.

(b) Qual é o custo marginal quando o nível de produção é $q = 20$ unidades.

$$C'(q) = \frac{3}{2}q^2 - 10q + 10$$

$$C'(20) = \frac{3}{2}(20)^2 - 10\,.\,20 + 10 = 410$$

(c) Determinar se existem, os valores de q tais que o custo marginal é nulo.

$$\frac{3}{2}q^2 - 10q + 10 = 0$$

$$3q^2 - 20q + 20 = 0$$

$$q = \frac{20 \pm \sqrt{400 - 4\,.\,3\,.20}}{2\,.\,3} = \frac{20 \pm 12{,}65}{6}$$

$$q_1 = 5{,}44 \qquad\qquad q_2 = 1{,}2$$

19. A função $q = 20000 - 400p$ representa a demanda de um produto em relação a seu preço p. Calcular e interpretar o valor da elasticidade da demanda ao nível de preço $p = 4$.

$$E(q,\, p) = \frac{dq}{dp}\,.\,\frac{p}{q}$$

$$= -400\,.\,\frac{p}{q}$$

$$p = 4 \quad \Rightarrow \quad q = 20\,000 - 400\,.\,4$$

$$= 20\,000 - 1600$$

$$= 18\,400$$

$$E = -400\,.\,\frac{4}{18\,400}$$

$$E \cong -0{,}087$$

Interpretação: A elasticidade é negativa e muito baixa. Isso significa que um pequeno aumento percentual no preço diminuirá muito pouco a demanda.

20. A função $q = 15 + 60y - 0{,}06y^2$ mede a demanda de um bem em função da renda média per capita denotada por y (unidade monetária), quando os outros fatores que influenciam a demanda são considerados constantes.

(a) Determinar a elasticidade da demanda em relação à renda y.

$$E(q,\, y) = \frac{dq}{dy} \cdot \frac{y}{q}$$

$$= (60 - 0{,}12\,y)\frac{y}{15 + 60\,y - 0{,}06\,y^2}$$

(b)Dar o valor da elasticidade da demanda, para um nível de renda $y = 300$. Interpretar o resultado.

$$E = (60 - 0{,}12\,.\,300)\frac{300}{15 + 60\,.\,300 - 0{,}06\,.\,300^2}$$

$$= (60 - 36)\frac{300}{15 + 18\,000 - 5\,400}$$

$$= \frac{24\,.\,300}{12\,615}$$

$$= 0{,}57$$

E é positiva e igual a $0{,}57$. Isso significa que o aumento da renda per capita aumentará a demanda.
1% de aumento na renda implicará em $0{,}57\%$ de aumento na demanda.