5.10 – EXERCÍCIO – pg. 215

1. Em cada um dos seguintes casos, verificar se o Teorema do Valor Médio se aplica. Em caso afirmativo, achar um número c em (a, b), tal que

$$f(\mathrm{c}) = \frac{f(a) - f(a)}{b - a}.$$

a) $f(\mathrm{x}) = \dfrac{1}{x}; \quad a = 2, \mathrm{b} = 3$

A função $f(x) = \dfrac{1}{x}$ é contínua em $[2,3]$.

A função $f(x) = \dfrac{1}{x}$ é derivável em $(2,3)$, pois o $\lim\limits_{\Delta x \to 0} = \dfrac{f(x - \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$ existe para todo x no intervalo $(2,3)$.

Temos, $f'(x) = \dfrac{-1}{x^2}$

$$f'(c) = \frac{-1}{c^2} = \frac{\frac{1}{b} - \frac{1}{a}}{b - a}$$

$$\frac{-1}{c^2} = \frac{\frac{a-b}{ab}}{b-a}$$

$$\frac{-1}{c^2} = \frac{a-b}{ab} \cdot \frac{1}{b-a}$$

$$\frac{-1}{c^2} = \frac{-(b-a)}{ab\,(b-a)}$$

$$\frac{1}{c^2} = \frac{1}{ab}$$

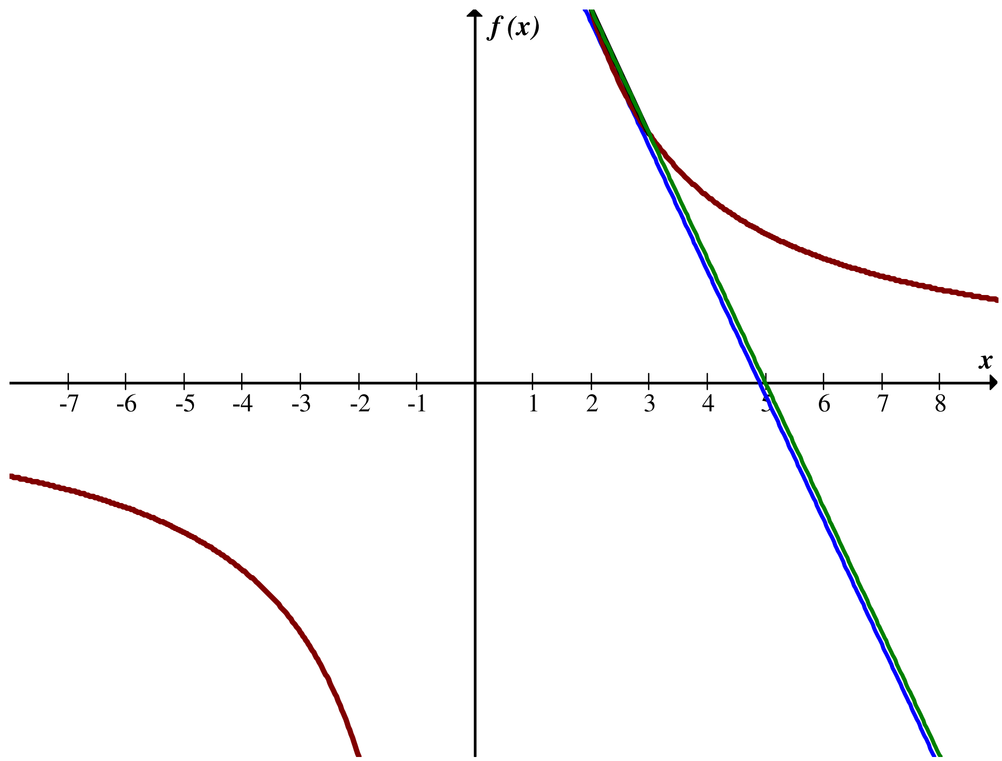
$$c^2 = ab$$

$$c = \sqrt{ab}$$

$$c = \sqrt{2.3}$$

$$c = \sqrt{6}$$

Interpretação geométrica: A figura que segue mostra que a reta tangente no ponto c, representada pela cor azul é paralela à reta secante que passa nos pontos (a, f(a)) e (b,f(b)), representada na cor verde.



b) $f(x)=\dfrac{1}{x}; \quad a=-1, b=3.$

Não se aplica o Teorema, pois a função não é contínua em $[-1,3]$.

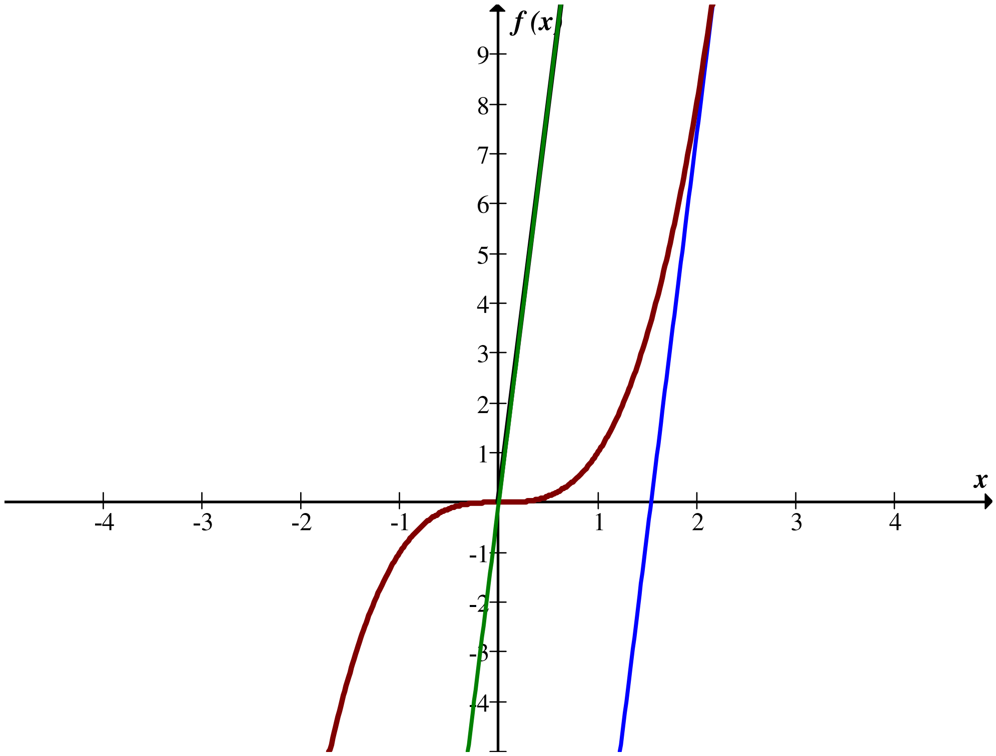
c) $f(\mathrm{x})=x^3; \quad a=0, b=4.$

A função é derivável em $(0,4)$ e contínua em $[0,4]$, pois f é do tipo polinomial.

$\Rightarrow \exists$ c tal que:

$$f'(c)=3c^2=\frac{b^3-a^3}{b-a}\Rightarrow 3c^2=\frac{4^3-0^3}{4-0} \quad \therefore \quad c=\frac{4}{\sqrt{3}}=\frac{4\sqrt{3}}{3}.$$

Interpretação geométrica: A figura que segue mostra que a reta tangente no ponto c, representada pela cor azul, é paralela à reta secante que passa nos pontos (a, f(a)) e (b,f(b)), representada na cor verde.



d) $f(x) = x^3; \quad a = -2, b = 0.$

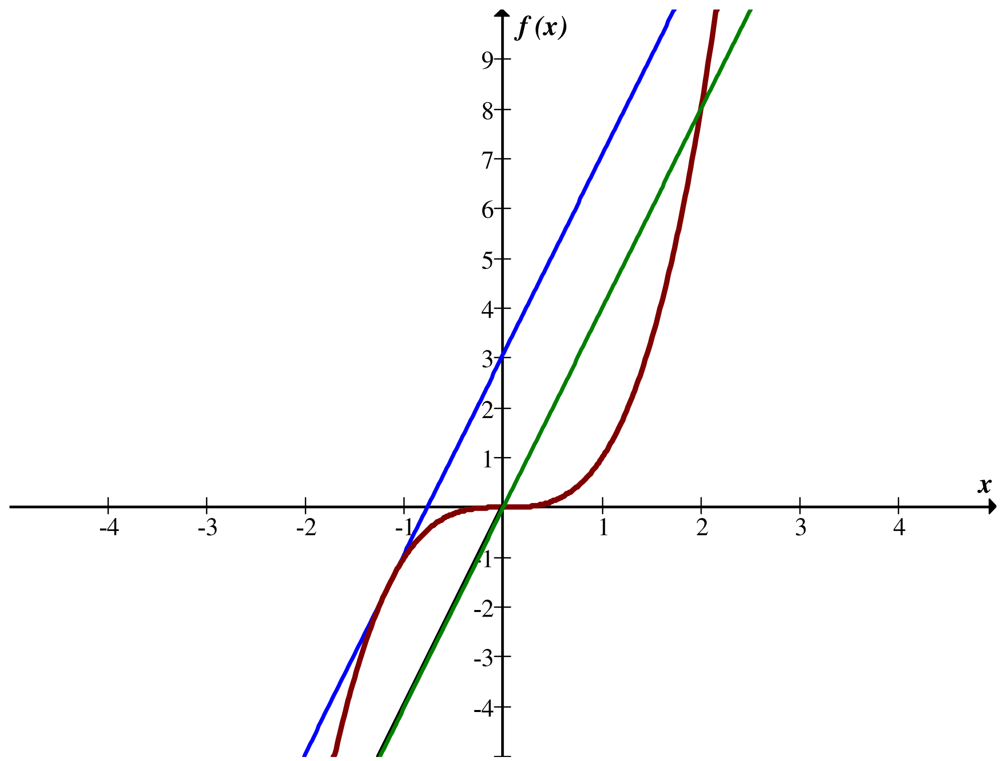
A função é derivável em $(-2,0)$ e é contínua em $[-2,0]$, pois f é do tipo polinomial. Assim,

$$f'(c) = 3c^2 = \frac{0^3 - (-2)^3}{0 - (-2)}$$

$$3c^2 = \frac{8}{2} = 4$$

$$c^2 = \frac{4}{3} \quad \therefore \quad c = \frac{-2}{\sqrt{3}} = \frac{-2\sqrt{3}}{3}.$$

Interpretação geométrica: A figura que segue mostra que a reta tangente no ponto c, representada pela cor azul, é paralela à reta secante que passa nos pontos (a, f(a)) e (b,f(b)), representada na cor verde.



e) $f(x) = \cos x; \quad a = 0, b = \pi/2.$

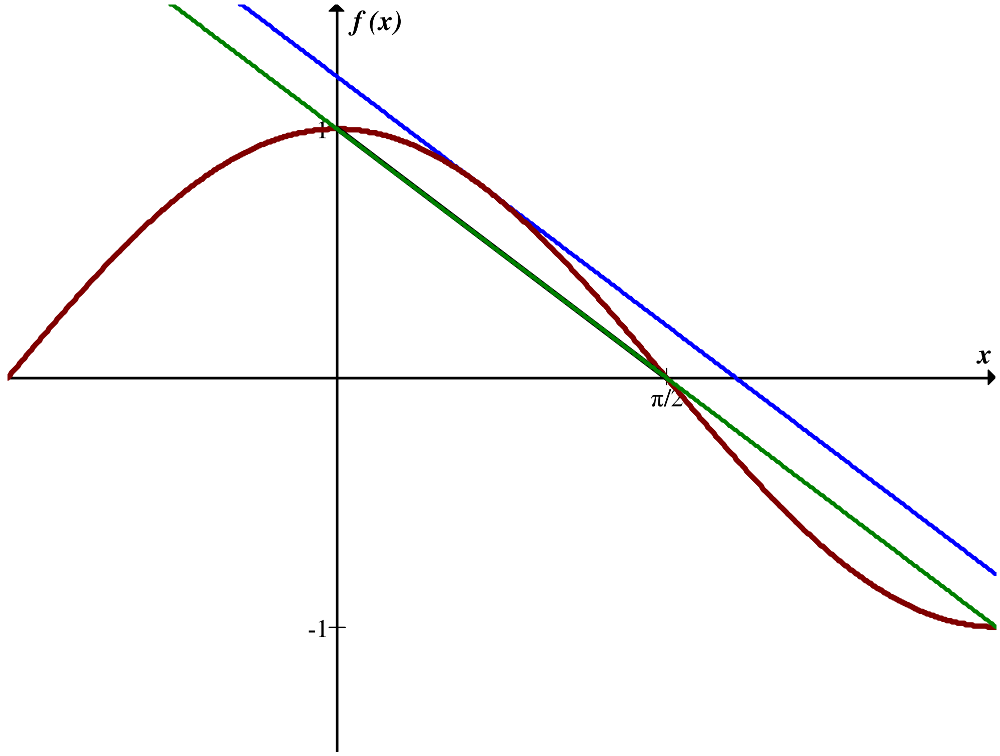
A função f é contínua em $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ e é derivável em $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. Assim,

$$f'(c) = -sen\ c = \frac{\cos\frac{\pi}{2} - \cos 0}{\frac{\pi}{2} - 0}$$

$$-sen\ c = \frac{0-1}{\frac{\pi}{2}}$$

$$c = arc\ sen\ \frac{2}{\pi}.$$

Interpretação geométrica: A figura que segue mostra que a reta tangente no ponto c, representada pela cor azul, é paralela à reta secante que passa nos pontos (a, f(a)) e (b,f(b)), representada na cor verde.



f) $\quad f(x) = tg\ x; \quad a = \pi/4, b = 3\pi/4.$

A função $f(x) = tg\ x$ não é contínua em $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right]$. Portanto, não se aplica o teorema.

g) $\quad f(\mathrm{x}) = \mathrm{tg\ x}; \quad a = 0, \mathrm{b} = \pi/4.$

A função $f(x) = tg\ x$ é contínua em $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ e é derivável em $\left(0, \frac{\pi}{4}\right)$. Assim,

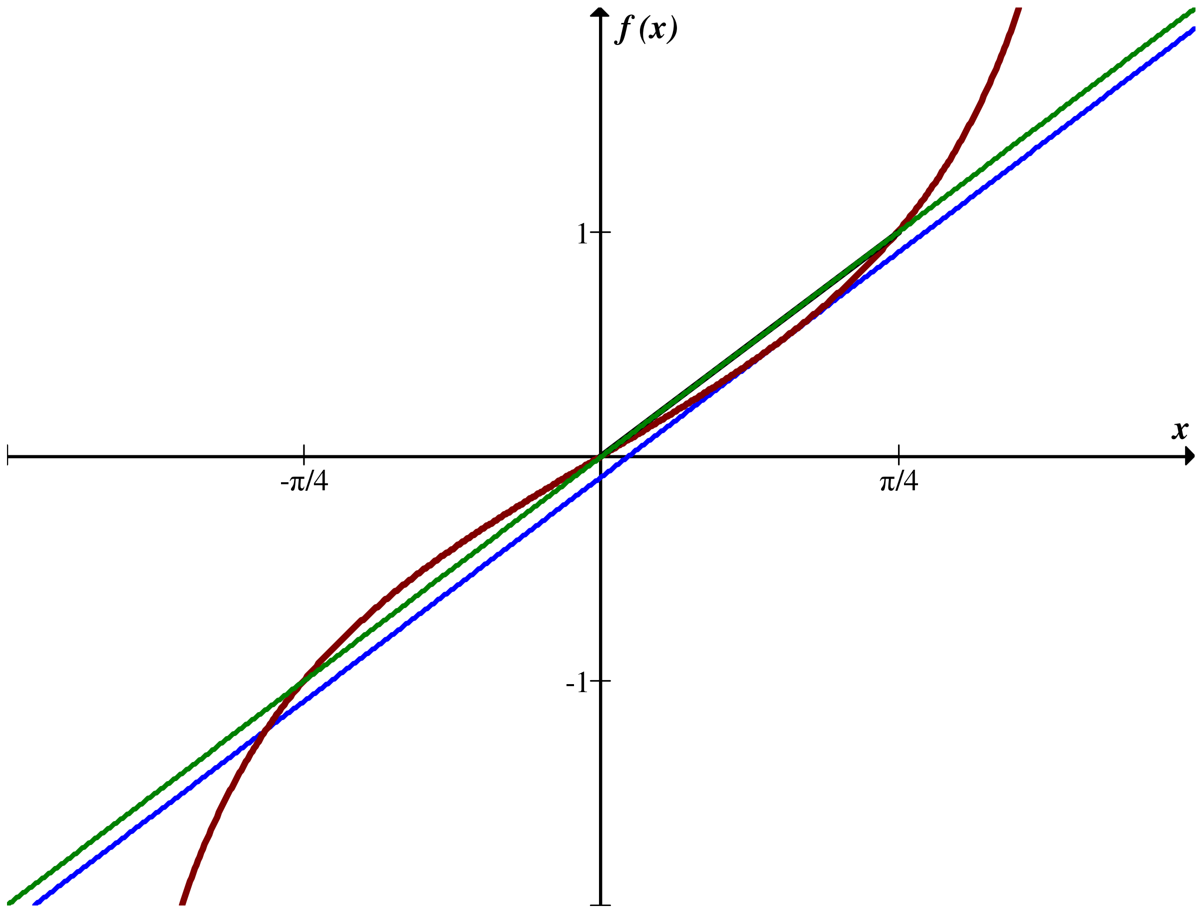
$$f'(c) = \sec^2 c = \frac{tg\ \frac{\pi}{4} - tg\ 0}{\frac{\pi}{4} - 0}$$

$$\sec^2 c = \frac{1-0}{\frac{\pi}{4}} \quad \Rightarrow \quad \sec^2 c = \frac{4}{\pi}$$

$$\sec c = \frac{2}{\sqrt{\pi}}$$

$$c = arc\ \sec \frac{2}{\sqrt{\pi}}.$$

Interpretação geométrica: A figura que segue mostra que a reta tangente no ponto c, representada pela cor azul, é paralela à reta secante que passa nos pontos (a, f(a)) e (b,f(b)), representada na cor verde.



h) $f(x)=\sqrt{1-x^2}; \quad x=-1, b=0.$

A função $f(x)$ é contínua em $[-1,0]$ e derivável em $(-1,0)$. Assim,

$$f'(c)=\frac{-c}{\sqrt{1-c^2}}=\frac{\sqrt{1-0^2}-\sqrt{1-(-1)^2}}{0-(-1)}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{-c}{\sqrt{1-c^2}}=\frac{1-0}{1}$$

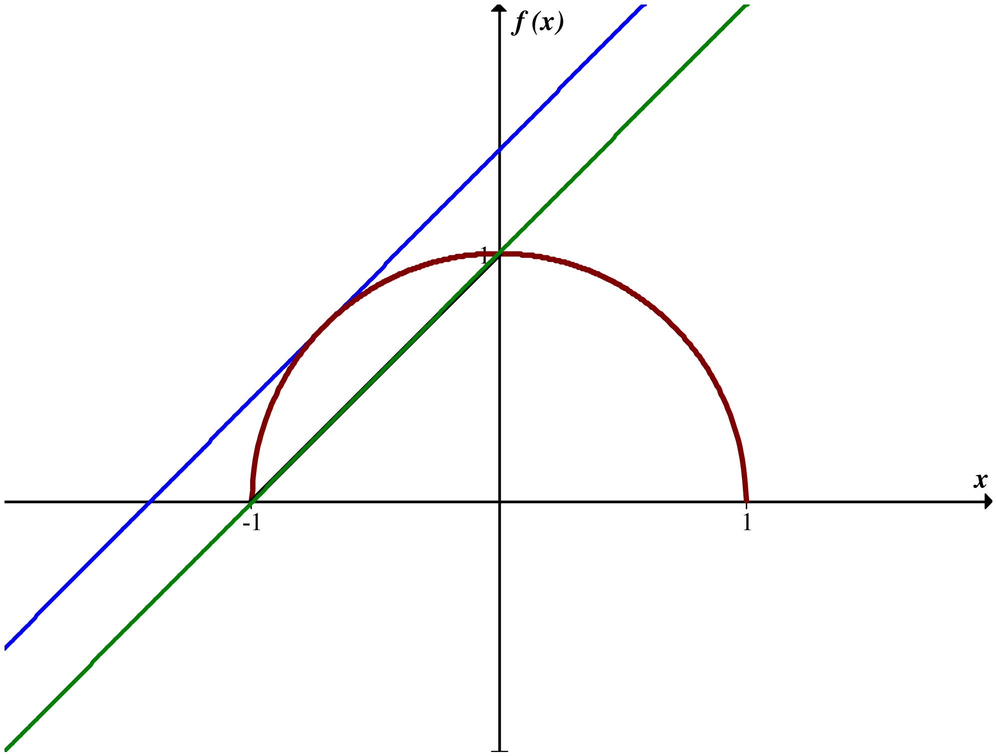
$$-c=\sqrt{1-c^2}$$

$$c^2=1-c^2$$

$$c^2+c^2=1 \quad \Rightarrow \quad 2c^2=1 \quad \therefore \quad c^2=\frac{1}{2}$$

$$c=\frac{-1}{\sqrt{2}}.$$

Interpretação geométrica: A figura que segue mostra que a reta tangente no ponto c, representada pela cor azul, é paralela à reta secante que passa nos pontos (a, f(a)) e (b,f(b)), representada na cor verde.



i) $f(\mathrm{x}) = \sqrt[3]{\mathrm{x}}$; $a = \text{-}1, \mathrm{b} = 1.$

A função é contínua em $[-1,1]$ mas não é derivável em $(-1,1)$. Assim, não se aplica o teorema.

j) $f(\mathrm{x}) = |\,\mathrm{x}\,|$; $a = \text{-}1, \mathrm{b} = 1$

A função é contínua em $[-1,1]$, mas não é derivável em $(-1,1)$, porque não é derivável em $x = 0$.

$$\left.\begin{aligned} \lim_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} &= \lim_{x \to 0^+} \frac{x - 0}{x} = 1 \\ \lim_{x \to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} &= \lim_{x \to 0^-} \frac{-x - 0}{x} = -1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \nexists\, f'(0)$$

Assim, não se aplica o Teorema.

2. A função $f(\mathrm{x}) = \mathrm{x}^{2/3} - 1$ é tal que $f(x) = f(-1) = f(1) = 0$. Por que ela não verifica o Teorema de Rolle no intervalo $[-1,1]$?

$$f(x) = x^{2/3} - 1 = \sqrt[3]{x^2} - 1$$
$$f'(x) = \frac{2}{3} x^{-1/3} = \frac{2}{3} \sqrt[3]{x}$$

A função f não é derivável no intervalo $[-1,1]$, pois não é derivável em 0.

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\sqrt[3]{x^2} - 1 - \sqrt[3]{0^2} + 1}{x - 0} = \lim_{x \to 0^+} \frac{\sqrt[3]{x^2}}{x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{\sqrt[3]{x}} = \infty$$

3. Seja $f(x) = -x^4 + 8x^2 + 9$. Mostrar que f satisfaz as condições do Teorema de Rolle no intervalo $[-3,3]$ e determinar os valores de $c \in (-3,3)$ que satisfaçam $f'(c) = 0$.

A função f é função polinomial, portanto é contínua e derivável em qualquer intervalo.

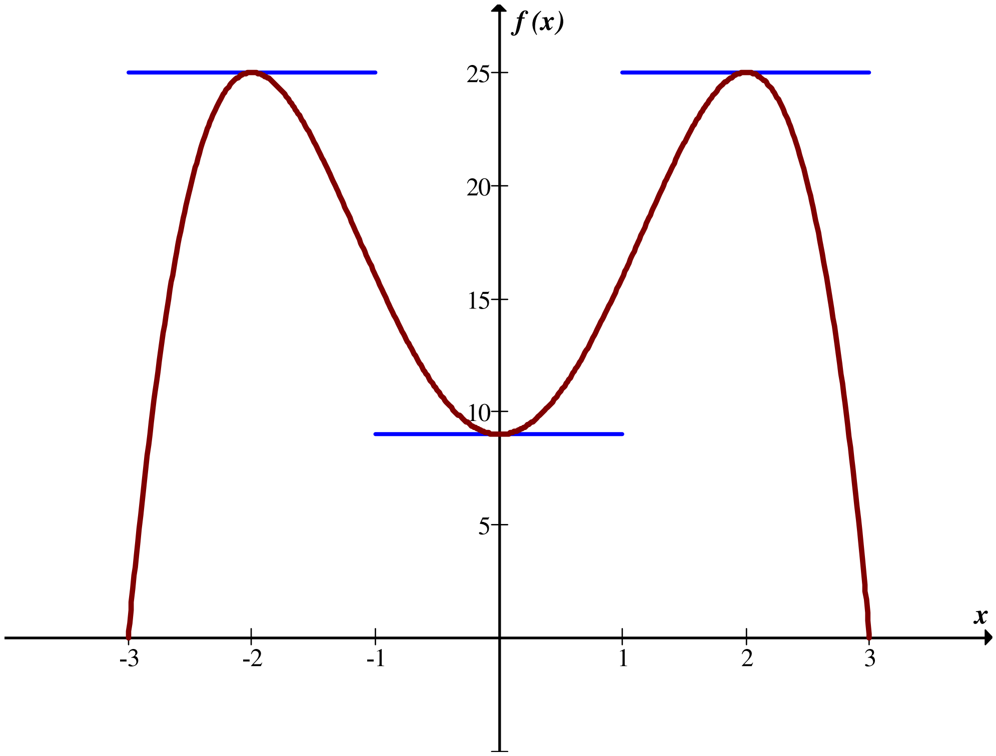
Em particular é contínua em $[-3,3]$ e derivável em $(-3,3)$.

$$\Rightarrow \exists\, c \in (-3,3) \quad / \quad f'(c) = \frac{f(3) - f(-3)}{3 - (-3)}$$

$$\left.\begin{array}{l} f(3) = -81 + 72 + 9 = 0 \\ f(-3) = -81 + 72 + 9 = 0 \end{array}\right\} f(3) - f(-3) = 0$$

$$f'(x) = -4x^3 + 16x$$
$$-4c^3 + 16c = 0$$
$$c = 0 \text{ ou } -4c^2 + 16 = 0$$
$$\Rightarrow c = 0, -2, +2.$$

A figura que segue ilustra a situação apresentada.



4. Usando o teorema do valor médio provar que:

a) $|\text{sen}\,\theta - \text{sen}\,\alpha| \leq |\theta - \alpha|,\ \forall \theta, \alpha \in$ R;

Seja $f(x) = sen\,x$. f é contínua e derivável em R .

Considerando-se f contínua em $[\theta, \alpha]$ e derivável em $(\theta, \alpha) \Rightarrow \exists\, c \in (\theta, \alpha)$ /

$$f'(c) = \frac{f(\alpha) - f(\theta)}{\alpha - \theta}.$$

$$\cos c = \frac{sen\ \alpha - sen\,\theta}{\alpha - \theta}$$

$$|\cos c| = \frac{|sen\ \alpha - sen\,\theta|}{|\alpha - \theta|}$$

$$|\cos c| = \frac{|sen\,\theta - sen\,\alpha|}{|\theta - \alpha|}$$

$$|sen\,\theta - sen\,\alpha| = |\cos c|\,|\theta - \alpha|$$

$$|\cos c| \leq 1 \Rightarrow |sen\,\theta - sen\,\alpha| \leq |\theta - \alpha|$$

para

$\theta, \alpha \in R$
$\theta < \alpha$

Analogamente, mostra-se para $\theta > c$. Se $\theta = \alpha$ é trivial.

b) $\quad$ $\text{sen}\theta \leq \theta, \theta \geq 0.$

Seja $f(x) = sen\ x - x$. f é continua em $[0, \theta], \quad \theta > 0$.

f é derivável em $(0, \theta), \quad \theta > 0$

$\Rightarrow \exists\, c \in (0, \theta)$

$$f'(c) = \frac{f(\theta) - f(0)}{\theta - 0}$$

$f(\theta) - f(0) = (\theta - 0)\ f'(c)$

$sen\theta - \theta = \theta\ (\cos c - 1)$

$\cos c = 0 \quad \Rightarrow \quad \cos c - 1 < 0$

$\theta\ (\cos c - 1) < 0$

$\Rightarrow sen\theta - \theta < 0 \ \Rightarrow sen\theta < \theta$

$0 < \cos c < 1 \Rightarrow \cos c - 1 < 0$

$\theta(\cos c - 1) < 0$

$\Rightarrow sen\theta - \theta < 0 \ \Rightarrow sen\theta < \theta$

$-1 < \cos c < 0 \Rightarrow \cos c - 1 < 0$

$\theta\ (\cos c - 1) < 0$

$\Rightarrow sen\theta - \theta < 0 \ \Rightarrow sen\theta < \theta$

Para $\theta = 0$ temos $sen\theta = 0$. Portanto a desigualdade é satisfeita.

5. Determinar os pontos críticos das seguintes funções, se existirem.

a) $\quad$ $y = 3x + 4$

$y' = 3$

$y' = 3 \neq 0$

Portanto, não admite ponto crítico.

b) $\mathrm{y = x^2 - 3x + 8}$

$y' = 2x - 3$

$2x - 3 = 0 \quad \Rightarrow \quad 2x = 3 \quad \therefore \quad x = \dfrac{3}{2}$

c) $\mathrm{y = 2 + 2x - x^2}$

$y' = 2 - 2x$

$2 - 2x = 0 \quad \Rightarrow \quad 2 = 2x \quad \therefore \quad x = 1$

d) $\mathrm{y = (x - 2)(x + 4)}$

$y' = 2x + 2$

$2x + 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad 2x = -2 \quad \therefore \quad x = -1$

e) $\mathrm{y = 3 - x^3}$

$y' = -3x^2$

$-3x^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad 3x^2 = 0 \quad \therefore \quad x = 0$

f) $\mathrm{y = x^3 + 2x^2 + 5x + 3}$

$y' = 3x^2 + 4x + 5$

$3x^2 + 4x + 5 = 0$

$x = \dfrac{-4 \pm \sqrt{16 - 60}}{6} = \dfrac{-4 \pm \sqrt{-44}}{6}$

$\Rightarrow \nexists$ no ponto crítico.

g) $\mathrm{y = x^4 + 4x^3}$

$$y' = 4x^3 + 12x^2$$
$$4x^3 + 12x^2 = 0$$
$$x^2\ (4x + 12) = 0$$
$$x^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 0$$
$$4x + 12 = 0$$
$$4x = -12$$
$$x = -\frac{12}{4} = -3$$

Pontos críticos: $0, -3$.

h) $\quad y = \text{sen x}$

$$y' = \cos x$$
$$\cos x = 0$$
$$x = \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \cdots$$

i) $\quad y = \cos \text{x}$

$$y' = -sen\, x$$
$$-\,sen\, x = 0 \quad \Rightarrow \quad sen\, x = 0$$
$$x = k\pi, \quad k \in Z$$

j) $\quad y = \text{sen x - cos x}$

$$y' = \cos x - (-sen\, x)$$
$$y' = \cos x + sen\, x$$
$$\cos x + sen\, x = 0$$
$$\cos x = -sen\, x$$
$$x = \frac{3\pi}{4} + k\pi, \quad k \in Z$$

k) $\quad y = e^x - x$

$y' = e^x - 1$

$e^x - 1 = 0$

$e^x = 1$

$\ln e^x = \ln 1$

$\ln e^x = 0$

$x \ln e^x = 0$

$x = 0$

l) $y = (\mathrm{x}^2 - 9)^{2/3}$

$y' = \frac{2}{3}(\mathrm{x}^2 - 9)^{-1/3} . 2x$

$y' = \frac{4x}{3\sqrt[3]{\mathrm{x}^2 - 9}}$

$\frac{4x}{3\sqrt[3]{\mathrm{x}^2 - 9}} = 0 \quad \Rightarrow \quad 4x = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 0$

Além disso, nos pontos $x_2 = 3$ e $x_3 - 3$ não existe a derivada.

Pontos críticos: $x_1 = 0, x_2 = 3$ e $x_3 - 3$

m) $y = \frac{\mathrm{x}}{x^2 - 4}$

$y' = \frac{(x^2 - 4) . - x . 2x}{(x^2 - 4)^2}$

$y' = \frac{x^2 - 4 - 2x^2}{(x^2 - 4)^2} = \frac{- x^2 - 4}{(x^2 - 4)^2} \Rightarrow$

$\frac{- x^2 - 4}{(x^2 - 4)^2} = 0 \Rightarrow -x^2 - 4 = 0$

$- x^2 = 4$

$x^2 = -4$

Não existem pontos críticos.

n) $y = | 2\mathrm{x} - 3 |$

$$y = \begin{cases} 2x-3 & se \quad x \geq \dfrac{3}{2} \\ -2x+3 & se \quad x < \dfrac{3}{2} \end{cases}$$

$$y' = \begin{cases} 2 & se \quad x > \dfrac{3}{2} \\ -2 & se \quad x < \dfrac{3}{2} \end{cases}$$

Para $x = \dfrac{3}{2}$ a derivada não existe $\Rightarrow x = \dfrac{3}{2}$ é um ponto crítico.

o) $\qquad f(\mathrm{x}) = \begin{cases} \mathrm{x} \ , \mathrm{x} < 0 \\ \mathrm{x}^2, \ x \geq 0 \end{cases}$

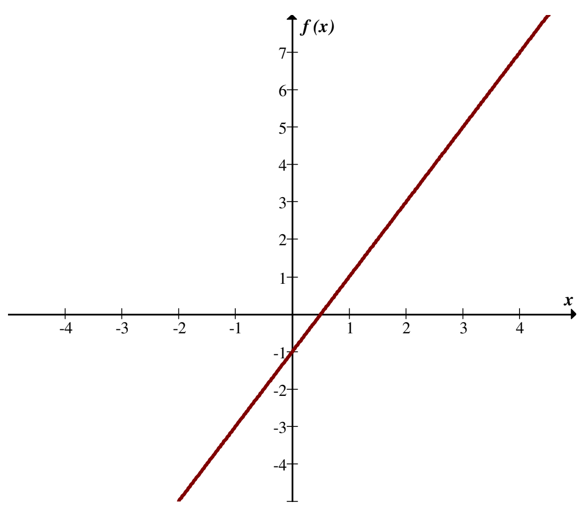
$$f'(x) = \begin{cases} 1, & x < 0 \\ 2x, & x < 0 \end{cases}$$

$f'(x)$ não está definida para $x = 0 \ \Rightarrow x = 0$ é ponto crítico.

6. Determinar, algebricamente, os intervalos nos quais as funções seguintes são crescentes ou decrescentes. Fazer um esboço do gráfico, comparando os resultados.

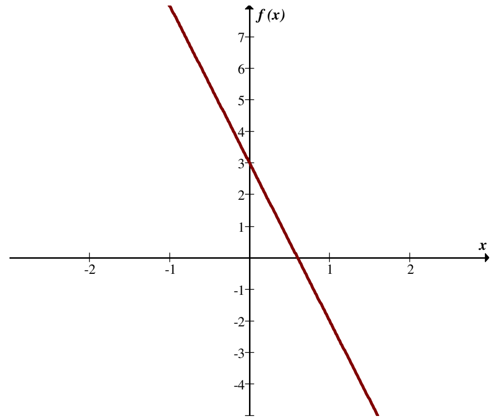
a) $\qquad f(x) = 2\mathrm{x} - 1$

$f'(\mathrm{x}) = 2 > 0$ para todo x. A função é crescente $(-\infty, +\infty)$



b) $f(x) = 3 - 5x$

$f'(x) = -5 < 0$, para todo x. A função é decrescente $(-\infty, +\infty)$.



c) $f(x) = 3x^2 + 6x + 7$

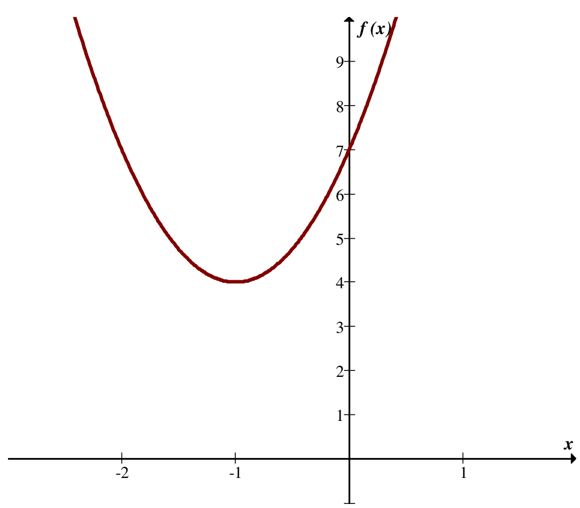
$f'(x) = 6x + 6$

$$6x + 6 > 0$$
$$6x > -6$$
$$x > -\frac{6}{6}$$
$$x > -1$$

$$6x + 6 < 0$$
$$\Rightarrow x < -1$$

Em $[-1, +\infty]$, $f(x)$ é crescente

Em $[-\infty, -1]$, $f(x)$ é decrescente.



d) $f(x) = x^3 + 2x^2 - 4x + 2$

$f'(x) = 3x^2 + 4x - 4$

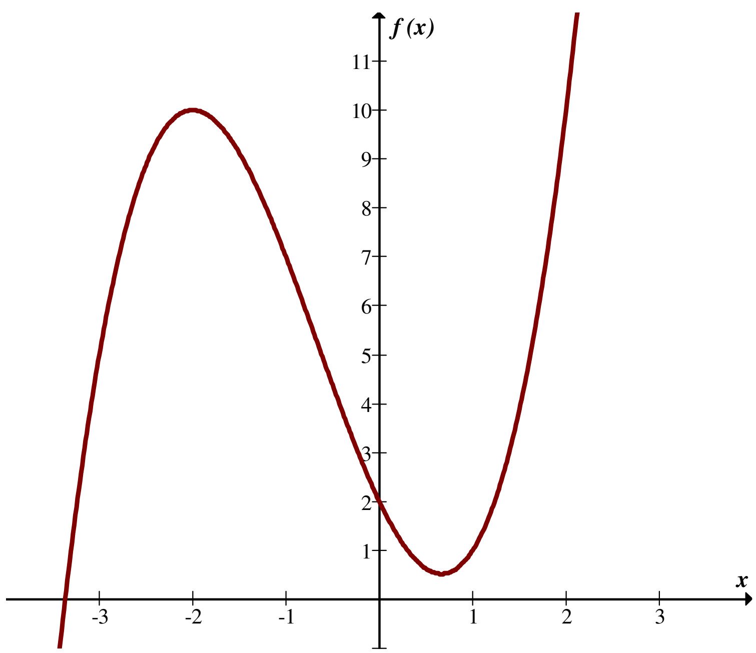
$3x^2 + 4x - 4 > 0$

$x_1 = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

$x_2 = -2$

A função é crescente em $[-\infty, -2] \cup \left[\frac{2}{3}, +\infty\right]$.

A função é decrescente em $\left[-2, \frac{2}{3}\right]$ é decrescente.



e) $f(x) = (x-1)(x-2)(x+3)$

$f(x) = x^3 - 7x + 6$

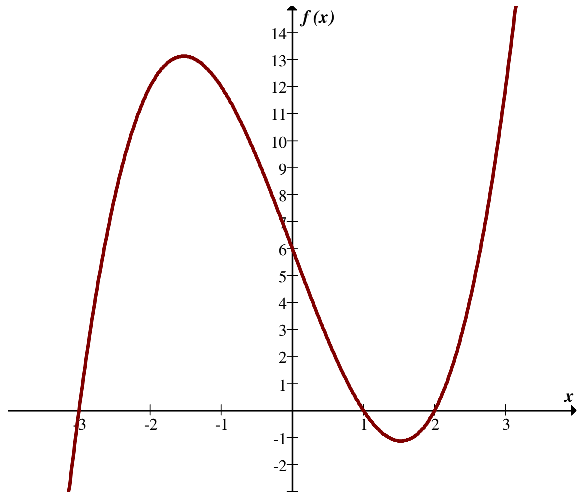
$f'(x) = 3x^2 - 7$

$3x^2 - 7 = 0$

$x = \pm\sqrt{\frac{7}{3}}$

A função é crescente em $\left(-\infty, -\sqrt{\frac{7}{3}}\right) \cup \left[\sqrt{\frac{7}{3}}, +\infty\right)$.

A função é decrescente em $\left[-\sqrt{\frac{7}{3}}, \sqrt{\frac{7}{3}}\right]$.



f) $f(\mathrm{x}) = \frac{\mathrm{x}}{2} + \mathrm{sen\ x}$

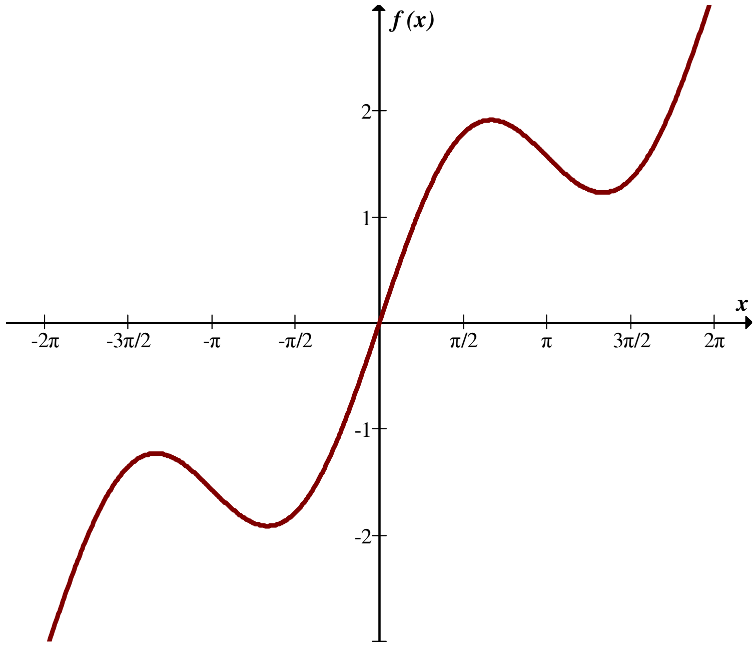
$f'(\mathrm{x}) = \frac{1}{2} + \cos \mathrm{x}$

$\frac{1}{2} + \cos \mathrm{x} > 0$

$\cos \mathrm{x} > -\frac{1}{2}$

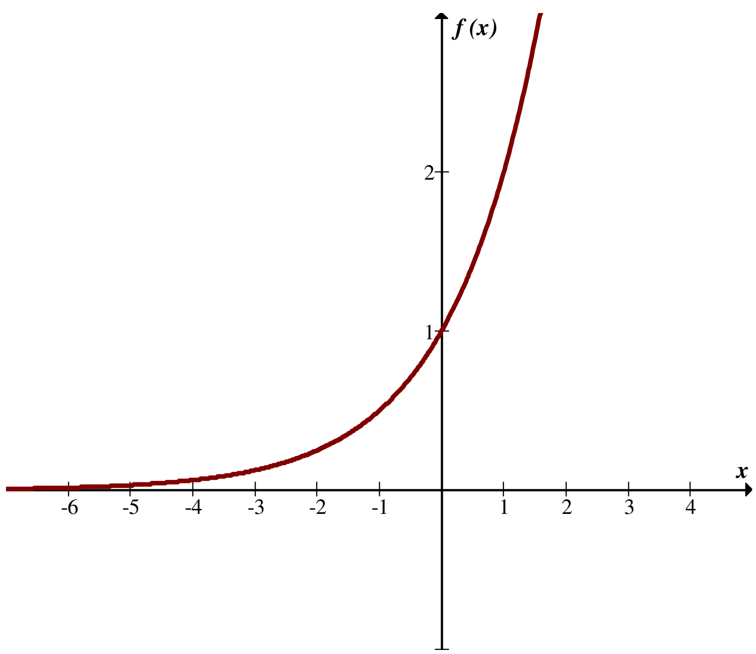
$\left\{\cdots\left[\frac{-4\pi}{3}, \frac{-2\pi}{3}\right], \left[\frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}\right], \cdots\right\} = \left[\frac{2\pi}{3} + 2n\pi, \frac{4\pi}{3} + 2n\pi\right]$, neste intervalo $\cos x < -\frac{1}{2}$ ==> decrescente

$\left\{\cdots\left[\frac{-2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right], \left[\frac{4\pi}{3}, \frac{8\pi}{3}\right], \cdots\right\} = \left[-\frac{2\pi}{3} + 2n\pi, \frac{2\pi}{3} + 2n\pi\right]$, neste intervalo $\cos x > -\frac{1}{2}$ ==> crescente



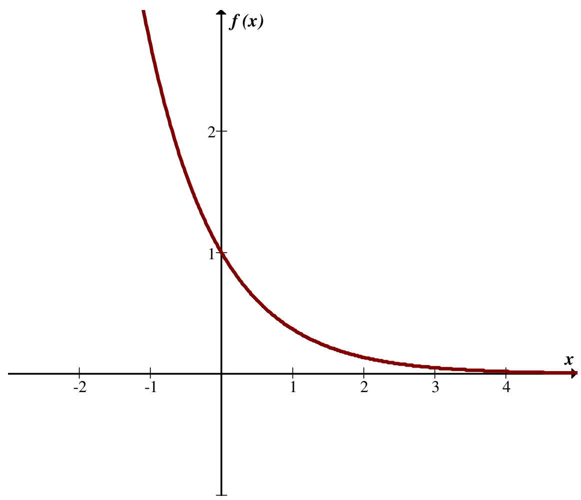
g) $f(x) = 2^x$

$f'(x) = 2^x \ln 2 > 0$. A função é crescente em $(-\infty, +\infty)$.



h) $f(x) = e^{-x}$

$f'(x) = -e^{-x} < 0$. A função é decrescente em $(-\infty, +\infty)$.

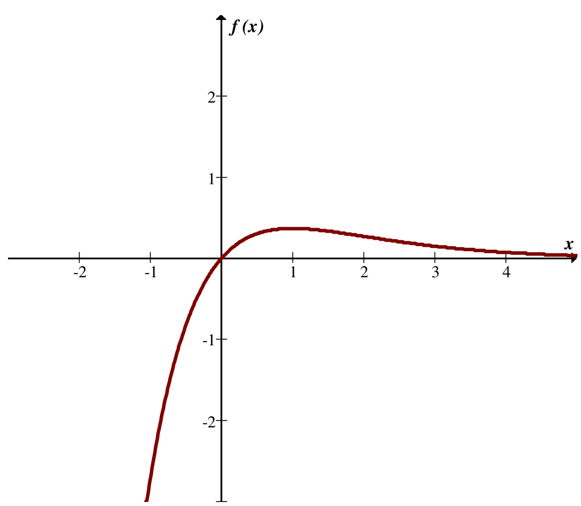


i) $f(x) = xe^{-x}$

$$\begin{aligned} f'(x) &= x \,.\, e^{-x}(-1) + e^{-x} \\ &= -xe^{-x} + e^{-x} \\ &= \frac{-x}{e^x} + \frac{1}{e^x} \\ &= \frac{1-x}{e^x} \end{aligned}$$

$$\frac{1-x}{e^x} > 0$$
$$1 - x > 0$$
$$-x > -1$$
$$x < 1$$

A função é crescente em $(-\infty, 1]$ e em $[1, +\infty)$ é decrescente.

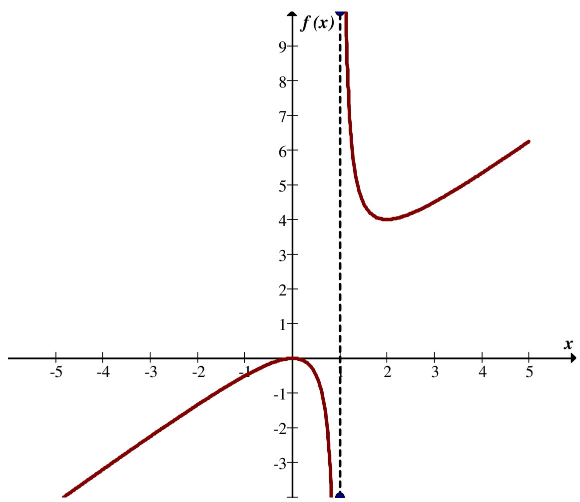


j) $f(\mathrm{x}) = \dfrac{\mathrm{x}^2}{\mathrm{x}-1}$

$$f'(x) = \frac{(x-1)\,.\,2x - x^2\,.1}{(x-1)^2}$$
$$= \frac{2x^2 - 2x - x^2}{(x-1)^2}$$
$$= \frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2}$$

$$\frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2} > 0 \quad \Rightarrow \quad x^2 - 2x > 0$$
$$x\,(x-2) > 0$$

A função é crescente em $(-\infty,0]$ e $[2,+\infty)$ e é decrescente em $[0,1] \cup [1,2]$.

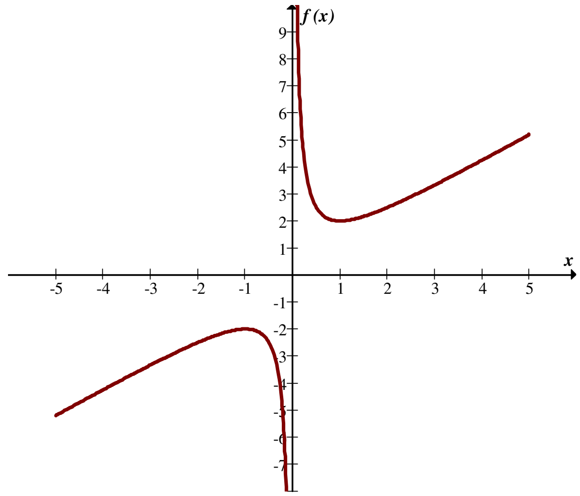


k) $f(\mathrm{x}) = \mathrm{x} + \dfrac{1}{x}$

$$f'(x) = 1 + \frac{-1}{x^2} = \frac{x^2 - 1}{x^2}$$

$$\frac{x^2 - 1}{x^2} > 0 \quad \Rightarrow \quad x^2 - 1 > 0 \Rightarrow (x-1)\,(x+1) > 0$$

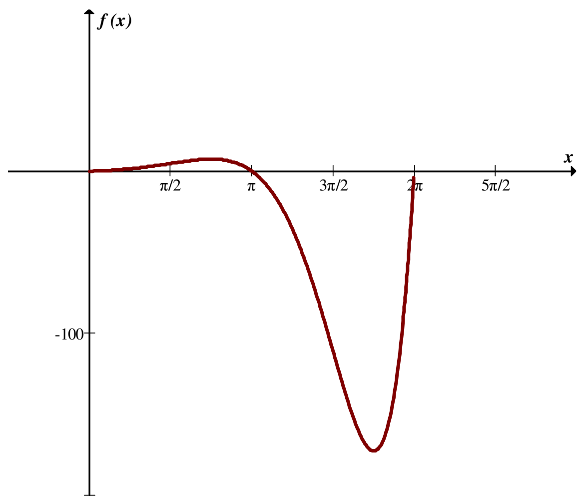
A função é decrescente em $[-1,0] \cup [0,1]$ e é crescente em $(-\infty,-1] \cup [1,+\infty)$.



l) $f(x) = e^x \text{ sen } x, \ x \in [0, 2\pi]$

$$f'(x) = e^x \cos x + sen\ x\ e^x$$
$$= e^x (\cos x + sen\ x)$$

A função é crescente em $\left[0, \dfrac{3\pi}{4}\right] \cup \left[\dfrac{7\pi}{4}, 2\pi\right]$ e é decrescente em $\left[\dfrac{3\pi}{4}, \dfrac{7\pi}{4}\right]$.



7. Determinar os máximos e mínimos das seguintes funções, nos intervalos indicados.

a) $f(x) = 1 - 3x, \quad [-2, 2]$

$f'(x) = -3$

$-3 < 0 \ \forall \ x$ ==> a função é decrescente em [-2,2].

$\Rightarrow f(-2)=1-3\,(-2)=7$ é máximo da função em $[-2,2]$ e $f(2)=1-3.2=1-6=-5$ é mínimo da função em $[-2,2]$.

b) $f(x)=x^2 - 4, \quad [-1,3]$

$f'(x)=2x$

$2x=0 \Rightarrow x=0$ é ponto crítico.

$$\left.\begin{array}{l} f(-1)=(-1)^2-4=-3 \\ f(0)=-4 \\ f(3)=3^2-4=5 \end{array}\right\} \quad ==> \quad \begin{array}{l} \text{- 4 é mínimo em [-1,3]} \\ \text{5 é máximo em [-1,3]} \end{array}$$

c) $f(x)=4 - 3x+3x^2, \quad [0,3]$

$f'(x)=-3+6x$

$-3+6x=0$
$6x=3$
$x=\dfrac{1}{2}$ é ponto crítico

$f(0)=4$

$f\left(\dfrac{1}{2}\right)=4-3\left(\dfrac{1}{2}\right)+3\left(\dfrac{1}{2}\right)^2=4-\dfrac{3}{2}+\dfrac{3}{4}=\dfrac{13}{4}$

$f(3)=4-3\,.\,3+3\,.\,3^2=4-9+27=22$

==> 22 é máximo em $[0,3]$ e 13/4 é mínimo em $[0,3]$.

d) $f(x)=x^3-x^2, [0,5]$

$f'(x)=3x^2-2x$

$3x^2-62=0$
$x\,(3x-2)=3$
$x=0$ e $x=\dfrac{2}{3}$ são pontos críticos

$f(0)=0$

$f\left(\frac{2}{3}\right)=\left(\frac{2}{3}\right)^3-\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{8}{27}-\frac{4}{9}=\frac{8-12}{27}=\frac{-4}{27}$

$f(5)=5^3-5^2=125-25=100$

$$\left.\begin{array}{l}\frac{-4}{27}\text{ é mínimo da função.}\\ 100\text{ é máximo da função}\end{array}\right\}\text{em }[0,5]$$

e) $f(x)=\frac{x}{1+x^2}$, $[-2,2]$

$$f'(x)=\frac{(1+x^2)\,1-x\,(2x)}{(1+x^2)^2}$$

$$=\frac{1+x^2-2x^2}{(1+x^2)^2}$$

$$=\frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$$

$1-x^2=0$

$x=1$ e $x=-1$ são pontos críticos

$f(-2)=\frac{-2}{1+4}=\frac{-2}{5}$

$f(-1)=\frac{-1}{1+1}=\frac{-1}{2}$

$f(1)=\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}$

$f(2)=\frac{2}{1+4}=\frac{2}{5}$

$$\left.\begin{array}{l}\frac{1}{2}\text{ é máximo da função.}\\ \frac{-1}{2}\text{ é mínimo da função}\end{array}\right\}\text{em }[-2,2]$$

f) $f(x)=|x-2|$, $[1,4]$

$$f(x)=\begin{cases}x-2, & x\geq 2\\ 2-x, & x<2\end{cases}$$

$$f'(x) = \begin{cases} 1, & x > 2 \\ -1, & x < 2 \end{cases}$$

$f'(2)$ não existe $\Rightarrow$ 2 é ponto crítico

$$f(1) = |1-2| = 1$$
$$f(2) = |2-2| = 0$$
$$f(4) = |4-2| = 2$$

2 é máximo e 0 é mínimo da função em $[1,4]$.

g) $f(x) = \cosh x, [-2,2]$

$f'(x) = sen\, h\, x$

$sen\, h\, x = 0$

$x = 0$ é ponto crítico

$$f(0) = \cosh 0 = \frac{1+1}{2} = 1$$
$$f(-2) = \cosh(-2) = \frac{e^2 + e^{-2}}{2} = 3{,}76219$$
$$f(2) = \cosh(2) = \frac{e^2 + e^{-2}}{2} = 3{,}76219$$

$$\left.\begin{array}{r} 1 \text{ é mínimo} \\ \dfrac{e^2 + e^{-2}}{2} \text{ é máximo} \end{array}\right\} \text{em } [-2,2]$$

h) $f(x) = tgh\, x, [-2,2]$

$$f'(x) = \sec h^2 x = \frac{4}{\left(e^x + e^{-x}\right)^2}$$

$\dfrac{4}{\left(e^x + e^{-x}\right)^2} > 0 \quad \forall\, x \quad \Rightarrow$ a função é sempre crescente.

$f(-2) = tgh\,(-2) = \dfrac{e^{-2} - e^{2}}{e^{-2} + e^{2}}$ é mínimo

$f(2) = \text{tgh}(2) = \dfrac{e^{2} - e^{-2}}{e^{2} + e^{-2}}$ é máximo

i) $f(x) = \cos 3x, \quad [0, 2\pi]$

$f'(x) = -3 sen\, 3x$

$-3\ sen\ 3x = 0$

$0, \dfrac{\pi}{3}, \dfrac{2\pi}{3}, \dfrac{3\pi}{3}, \dfrac{4\pi}{3}, \dfrac{5\pi}{3}, 2\pi$ são pontos críticos

$\text{f}(0) = \text{f}(\dfrac{2\pi}{3}) = \text{f}(\dfrac{4\pi}{3}) = \text{f}(2\pi) = 1$ é mínimo

$\text{f}(\dfrac{\pi}{3}) = \text{f}(\dfrac{3\pi}{3}) = \text{f}(\dfrac{5\pi}{3}) = -1$ é máximo

j) $f(x) = \cos^2 x, \quad [0, 2\pi]$

$f'(x) = -2 \cos x\ sen\, x$

$-2 \cos x\ sen\, x = 0$

$\cos x = 0$ ou $sen\, x = 0$

$x = 0, \dfrac{\pi}{2}, \pi, \dfrac{3\pi}{2}, 2\pi$ são pontos críticos

$f(0) = \cos^2 0 = 1$

$f\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = \cos^2 \dfrac{\pi}{2} = 0$

$f(\pi) = \cos^2 \pi = 1$

$f\left(\dfrac{3\pi}{2}\right) = \cos^2 \dfrac{3\pi}{2} = 0$

$f(2\pi) = 1$

1 é máximo e 0 é mínimo

k) $f(x) = sen^3 x - 1, \quad \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$

$f'(x) = 3\, sen^2\, x\, .\cos x$

$3\, sen^2\, x\, .\cos x = 0$

$sen\, x = 0$ ou $\cos x = 0$

$x = 0$ e $x = \dfrac{\pi}{2}$ são pontos críticos

$f(0) = sen^3\, 0 - 1 = 0 - 1 = -1$ é mínimo

$f\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = sen^3\, \dfrac{\pi}{2} = 1 - 1 = 0$ é máximo

8. Encontrar os intervalos de crescimento, decrescimento, os máximos e os mínimos relativos das seguintes funções.

a) $f(x) = 2x + 5$

$f'(x) = 2$

$2 > 0 \Rightarrow$ a função é sempre crescente

$\nexists$ máximo e mínimo relativo

b) $f(x) = 3x^2 + 6x + 1$

$f'(x) = 6x + 6$

$6x + 6 > 0$

$6x > -6$

$x > \dfrac{-6}{6}$

$x > -1$

Em $[-1, +\infty]$ a função é crescente

Em $(-\infty, -1]$ é decrescente

$x = -1$ é ponto crítico (de mínimo)

$f(-1) = 3\,(-1)^2 + 6\,(-1) + 1$

$= 3 - 6 + 1$

$= -2$ é o mínimo da função

c) $g(x) = 4x^3 - 8x^2$

$g'(x) = 12x^2 - 16x$

$12x^2 - 16x > 0$
$x\,(12x - 16) > 0$

A função é crescente em $(-\infty,0) \cup \left[\frac{4}{3},+\infty\right)$ e decrescente em $\left[0,\frac{4}{3}\right)$.

0 e $\frac{4}{3}$ são pontos críticos

$f(0) = 0 \quad \rightarrow \quad$ máximo

$f\left(\frac{4}{3}\right) = 4\,.\,\frac{64}{27} - 8\,.\,\frac{16}{9} \quad \rightarrow \quad$ mínimo

d) $h(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 6x + 5$

$$\begin{aligned} h'(x) &= \frac{1}{3}\,3\,x^2 + \frac{1}{2}\,2\,x - 6 \\ &= x^2 + x - 6 \\ &= (x-2)\,(x+3) \end{aligned}$$

A função é decrescente em $[-3,2]$ e em $(-\infty,-3] \cup [2,+\infty)$ é crescente.

-3 é ponto de máximo

2 é ponto de mínimo

$$\begin{aligned} h(-3) &= \frac{1}{3}\,(-3)^3 + \frac{1}{2}\,(-3)^2 - 6\,(-3) + 5 \\ &= \frac{1}{3}\,(-27) + \frac{9}{2} - 18 + 5 \\ &= \frac{-54 + 27 + 108 + 30}{6} = \frac{37}{2} \text{ é máximo} \end{aligned}$$

$$h(2)=\frac{1}{3}8+\frac{1}{2}4-6.\,2+5$$
$$=\frac{8}{3}+2-12+5$$
$$=\frac{-7}{3} \text{ é mínimo}$$

e) $f(t)=\frac{\text{t - 1}}{\text{t + 1}},\ t\neq -1$

$$f'(t)=\frac{(t+1)\,1-(t-1)\,1}{(t+1)^2}$$
$$=\frac{t+1-t+1}{(t+1)^2}$$
$$=\frac{2}{(t+1)^2}>0\text{. A função é sempre crescente. ∄ máximo nem mínimo}$$

f) $f(t)=t+\frac{1}{t},\ t\neq 0$

$$f'(t)=1+\frac{-1}{t^2}=\frac{t^2-1}{t^2}$$

$$\frac{t^2-1}{t^2}>0$$
$$t^2-1>0$$
$$(t-1)\,(t+1)>0$$

A função é decrescente em $[-1,0)\cup(0,1]$, e é crescente em $(-\infty,-1]\cup[1+\infty)$.

-1 é ponto de máximo

1 é ponto de mínimo.

$$f(-1)=-1+\frac{1}{-1}=-1-1=-2 \text{ é máximo relativo}$$
$$f(1)=1+1=2 \text{ é mínimo relativo}$$

g) $g(x)=xe^x$

$g'(x) = x\,e^x + e^x$

$$x\,e^x + e^x = e^x(x+1) > 0$$
$$x+1>0$$
$$x>-1$$

Em $[-1,+\infty)$ a função é crescente e em $(-\infty,-1]$ é decrescente

-1 é ponto de mínimo

$g(-1) = (-1)\,e^{-1} = -e^{-1} = -\dfrac{1}{e}$ é mínimo.

h) $h\,(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$

$h(x)$ é definida para $x>0$.

$$h'(x) = \frac{-1\,\frac{1}{2}\,x^{-1/2}}{x}$$
$$= \frac{\frac{-1}{2\sqrt{x}}}{x}$$
$$= \frac{-1}{2x\sqrt{x}} < 0, \forall x > 0$$

A função é decrescente em $(0,+\infty)$. $\nexists$ máximo ou mínimo.

i) $f\,(x) = |\,2 - 6x\,|$

$$f\,(x) = \begin{cases} 2-6x & se \quad x \le \dfrac{1}{3} \\ 6x-2 & se \quad x > \dfrac{1}{3} \end{cases}$$

$$f\,'(x) = \begin{cases} -6 & se \quad x < \dfrac{1}{3} \\ 6 & se \quad x > \dfrac{1}{3} \end{cases}$$

A função é crescente em $\left[\frac{1}{3},+\infty\right)$ e é decrescente em $\left(-\infty,\frac{1}{3}\right]$.

$x=\frac{1}{3}$ é ponto crítico

$f\left(\frac{1}{3}\right)=0$ é mínimo da função.

j) $\quad g(x)=\begin{cases} x+4, & x \le -2 \\ x^2-2, & x>-2 \end{cases}$

$g'(x)=\begin{cases} 1, & x<-2 \\ 2x, & x>-2 \end{cases}$

$g'(0)=0$ e $g'(-2)$ não existe. Portanto, -2 e 0 são pontos críticos.

A função é crescente em $(-\infty,-2]\cup[0,+\infty)$ e decrescente em $[-2,0]$.

$f(-2)=2$ é máximo
$f(0)=-2$ é mínimo

k) $\quad h(t)=\begin{cases} 3-4t, & t>0 \\ 4t+3, & t\le 0 \end{cases}$

$h'(t)=\begin{cases} -4, & t>0 \\ 4, & t<0 \end{cases}$

$h'(0)$ não existe. Portanto, $t=0$ é ponto crítico.

Em $(-\infty,0]$ a função é crescente e em $[0,+\infty)$ é decrescente.

$t=0$ é ponto de máximo

$h(0)=3$ é máximo da função.

1) $\quad f(x)=\begin{cases} 1+x, & x<-1 \\ 1-x^2, & x\ge -1 \end{cases}$

$f'(x)=\begin{cases} 1, & x<-1 \\ -2x, & x>-1 \end{cases}$

Pontos críticos: $x = -1$ e $x = 0$.

A função é crescente em $(-\infty, 0]$ e é decrescente em $[0, +\infty)$.

$x = 0$ é ponto de máximo

$x = -1$ não é um extremo

$f(0) = 1 - 0^2 = 1$ é máximo da função.

m) $$g(x) = \begin{cases} 10 - (x-3)^2 & , \quad x \leq -2 \\ 5(x-1) & , \quad -2 < x \leq -1 \\ -\sqrt{91 + (x-2)^2}, & \quad x > -1 \end{cases}$$

$$g'(x) = \begin{cases} -2\,(x-3) = -2x + 6, \quad x < -2 \\ 5, \quad -2 < x < -1 \\ -\sqrt{91 + (x-2)^2}, \quad x > -1 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} -2\,(x-3) &> 0 \\ 2\,(x-3) &< 0 \\ x - 3 &< 0 \\ x &< 3 \end{aligned} \qquad \frac{x-2}{-\sqrt{91 + (x-2)^2}} > 0 \qquad \begin{aligned} x - 2 &< 0 \\ x &< 2 \end{aligned}$$

Em $(-\infty, +2]$ a função é crescente e em $[2, +\infty)$ é decrescente.

$x = 2$ é ponto de máximo.

$g(2) = -\sqrt{91 + (2-2)^2} = -\sqrt{91}$ é máximo.

9. Encontrar os pontos de máximo e mínimo relativos das seguintes funções, se existirem. Fazer um esboço do gráfico e comparar os resultados.

a) $f(x) = 7x^2 - 6x + 3$

$f'(x) = 14x - 6$

$14x - 6 = 0$

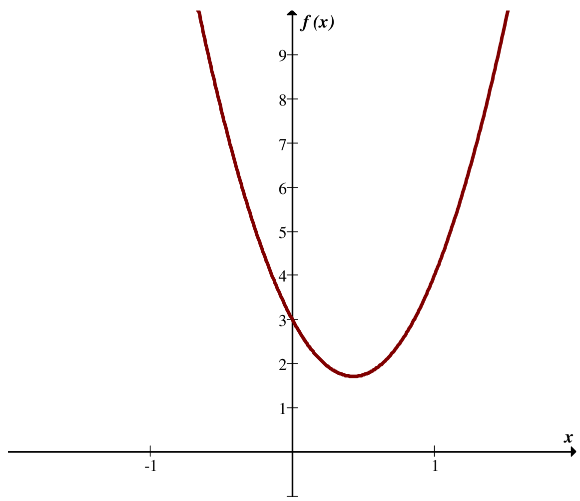
$14x = 6$

$x = \frac{6}{14}$

$x = \frac{3}{7}$ é ponto crítico

$f''(x) = 14$

$f''\left(\frac{3}{7}\right) = 14 > 0 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{3}{7}$ é ponto de mínimo relativo



b) $\quad g(x) = 4x - x^2$

$g'(x) = 4 - 2x$

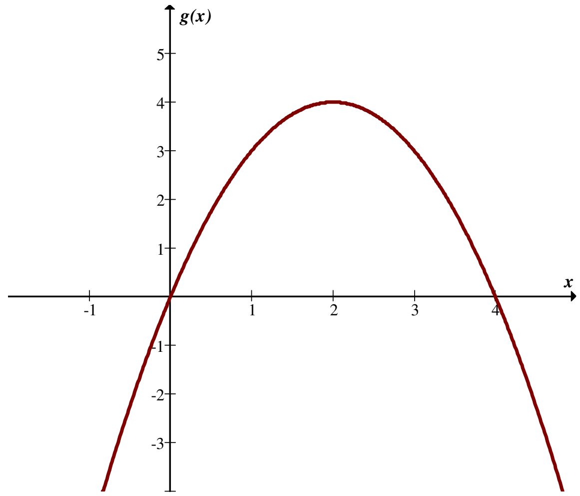
$4 - 2x = 0$

$4 = 2x$

$x = 2$

$g''(x) = -2$

$g''(2) = -2 < 0 \quad \Rightarrow \quad x = 2$ é ponto de máximo relativo.



c) $h(x) = \frac{1}{3}x^3 + 3x^2 - 7x + 9$

$h'(x) = \frac{1}{3}3x^2 + 6x - 7$

$x^2 + 6x - 7 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{-6 \pm \sqrt{36+28}}{2}$

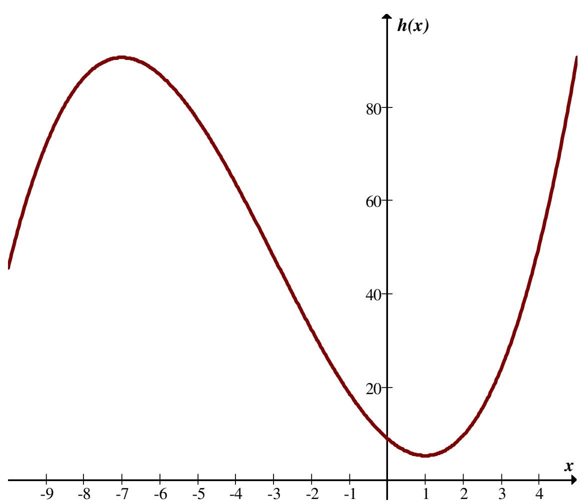
$x = \frac{-6 \pm \sqrt{64}}{2} = \frac{-6 \pm 8}{2}$

$x_1 = 1$ e $x_2 = -7$ são pontos críticos

$h''(x) = 2x + 6$

$h''(1) = 2 + 6 = 8 > 0 \quad \Rightarrow \quad 1$ é ponto de mínimo

$h''(-7) = 2\,(-7) + 6 = -14 + 6 = -8 < 0 \quad \Rightarrow \quad -7$ é ponto de máximo .



d) $\qquad h(x)=\frac{1}{4}x^4-\frac{5}{3}x^3+4x^2-4x+8$

$h'(x)=\frac{1}{4}4x^3-\frac{5}{3}3x^2+8x-4$

$x^3-5x^2+8x-4=0$

$x=1$ e $x=2$ são pontos críticos .

$h''(x)=3x^2-10x+8$

$h''(1)=3-10+8=1>0 \quad \Rightarrow \quad x=1$ é ponto de mínimo

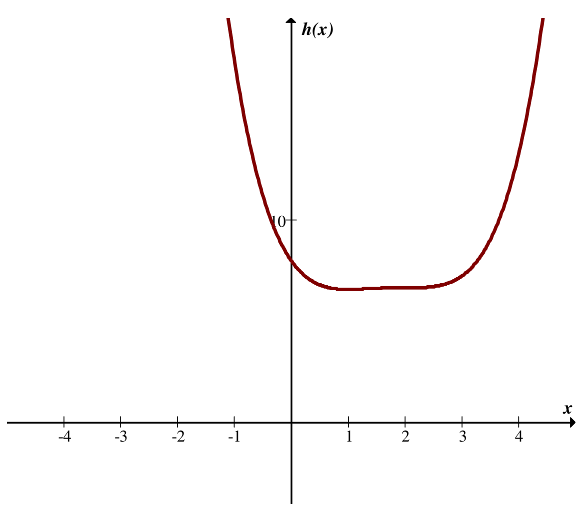
$$\begin{aligned} h''(2) &= 34-10x+8 \\ &= 12-20+8 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Nada se pode afirmar usando o teste da derivada segunda.

Analisando a derivada primeira

$h'(x)=(x-1)(x-2)^2$,

temos que $h'(x)\geq 0$ para $x>1$. Portanto, h é crescente em $[1,+\infty)$ e $x=2$ não é máximo nem mínimo relativo.

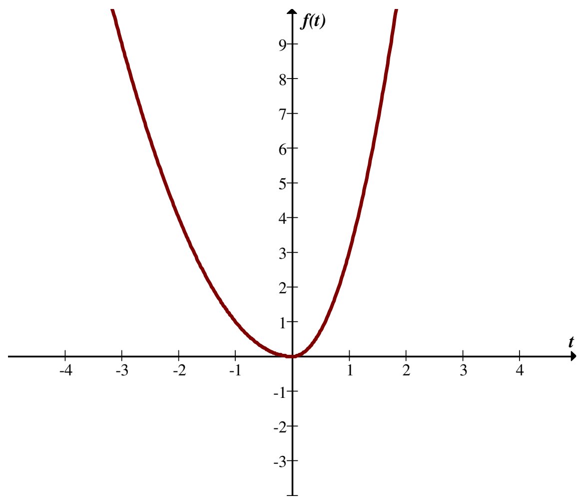


e) $f(t)=\begin{cases} t^2\,, & t<0 \\ 3t^2, & t\geq 0 \end{cases}$

$$f(t)=\begin{cases} 2t, & t<0 \\ 6t, & t>0 \end{cases}$$

Em $(-\infty,0)$, $f'(t)<0$ e em $(0,+\infty)$, $f'(t)>0$.

Pelo teste da derivada primeira, $t=0$ é ponto de mínimo.



f) $f(x)=6x^{2/3}-2x$

$$\begin{aligned} f'(x) &= 6\frac{2}{3}x^{-1/3}-2 \\ &= 4x^{-1/3}-2 \\ &= \frac{4}{\sqrt[3]{x}}-2 \end{aligned}$$

$$4x^{-1/3}-2=0$$

$$4x^{-1/3}=2$$

$$\left(x^{-1/3}\right)^3=\left(\frac{1}{2}\right)^3$$

$$x^{-1}=\frac{1}{8}$$

$$\frac{1}{x}=\frac{1}{8} \quad \therefore \quad x=8 \text{ é ponto crítico}$$

$$f''(x) = 4\,\frac{-1}{3}\,x^{-4/3} = \frac{-4}{3}x^{-4/3}$$

$$f''(8) = \frac{-4}{3}.8^{-4/3}$$

$$= \frac{-4}{3}.\frac{1}{16} = \frac{-1}{12}$$

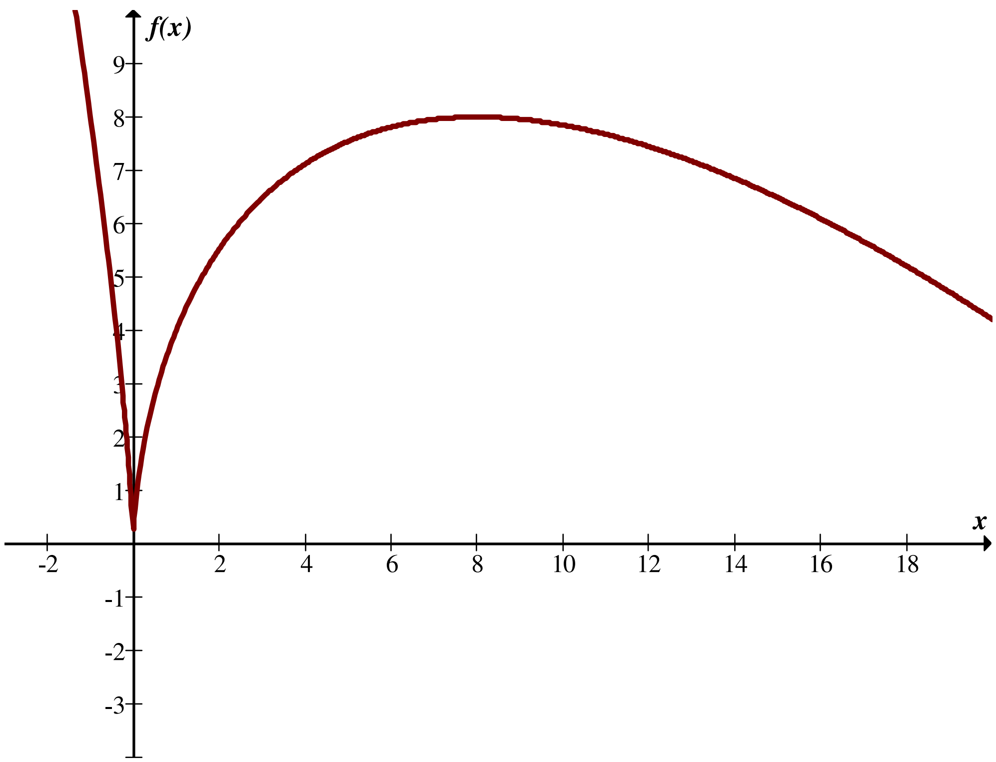
$\Rightarrow 8$ é ponto de máximo

$f'(0)$ não existe. Portanto, $x = 0$ também é ponto crítico.

Para $x < 0, f'(x) < 0.$

Para $0 < x < 8, f'(x) > 0.$

Portanto, usando o teste da derivada primeira, segue que $x = 0$ é um ponto de mínimo.



g) $f(x) = 5 + (x-2)^{7/5}$

$$f'(x) = \frac{7}{5}(x-2)^{2/5}$$

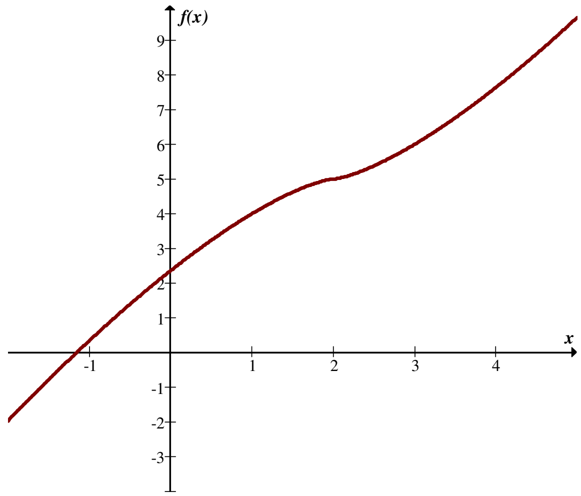
$$\frac{7}{5}(x-2)^{2/5} = 0$$

$$(x-2)^{2/5} = 0$$

$$x-2=0$$

$x = 2$ é ponto crítico

$f'(x)$ é sempre $> 0 \Rightarrow \nexists$ máximos nem mínimos.



h) $\quad f(x) = 3 + (2x+3)^{4/3}$

$$f'(x) = \frac{4}{3}(2x+3)^{1/3} \,.\, 2$$

$$= \frac{8}{3}(2x+3)^{1/3}$$

$$\frac{8}{3}(2x+3)^{1/3} = 0$$

$$(2x+3)^{1/3} = 0$$

$$2x+3=0 \quad \Rightarrow \quad 2x=-3$$

$x = -\frac{3}{2}$ é ponto crítico

Vamos usar o teste da derivada primeira.

$$f'(x) = \frac{8}{3}(2x+3)^{1/3} > 0$$

$$(2x+3)^{1/3} > 0$$

$$\sqrt[3]{2x+3} > 0$$

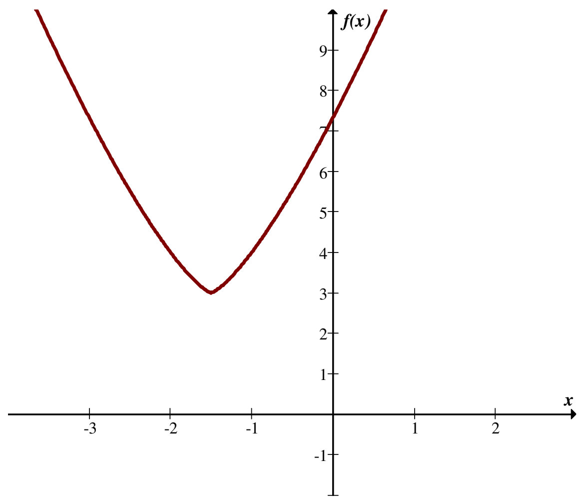
$$2x+3 > 0$$

$$2x > -3$$

$$x > -\frac{3}{2}$$

$f(x)$ é decrescente para em $\left(-\infty, -\frac{3}{2}\right)$ e é crescente em $\left(\frac{3}{2}, +\infty\right)$. Logo,

$x = -\frac{3}{2}$ é ponto de mínimo



i) $\quad g(x) = \dfrac{4x}{x^2+4}$

$$g'(x) = \frac{(x^2+4)\,4 - 4x\,.\,2x}{(x^2+4)^2}$$

$$= \frac{4x^2+16-8x^2}{(x^2+4)^2}$$

$$= \frac{-4x^2+16}{(x^2+4)^2}$$

$$\frac{-4x^2+16}{(x^2+4)^2}=0$$

$$-4x^2+16=0$$

$$4x^2=16$$

$$x^2=4$$

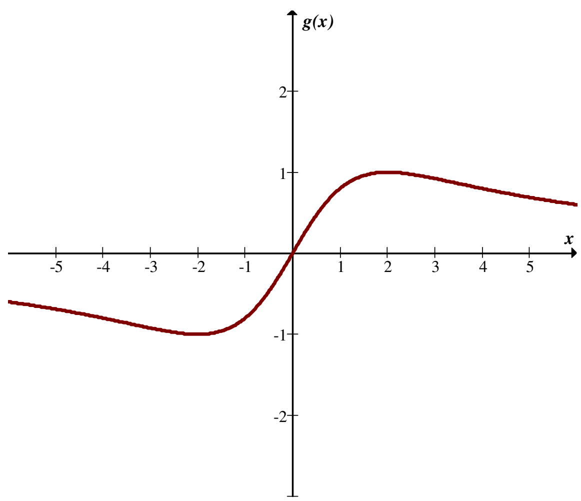
$x=\pm 2$ são pontos críticos

$$g''(x)=\frac{(x^2+4)^2(-8x)-(-4x^2+16)\,.\,2\,(x^2+4)\,.\,2x}{(x^2+4)^4}$$

$$=\frac{8x^3-96x}{(x^2+4)^3}$$

$$g''(2)=\frac{64-192}{512}=\frac{-128}{512}<0 \Rightarrow 2 \text{ é ponto de máximo}$$

$$g''(-2)=\frac{-64+192}{512}>0 \Rightarrow -2 \text{ é ponto de mínimo.}$$



j) $h(x)=\dfrac{x+1}{x^2-2x+2}$

$$h'(x)=\frac{(x^2-2x+2)\,.1-(x+1)\,(2x-2)}{(x^2-2x+2)^2}$$

$$=\frac{x^2-2x+2-2x^2+2x-2x+2}{(x^2-2x+2)^2}$$

$$=\frac{-x^2-2x+4}{(x^2-2x+2)^2}$$

$$\frac{-x^2-2x+4}{(x^2-2x+2)^2}=0$$

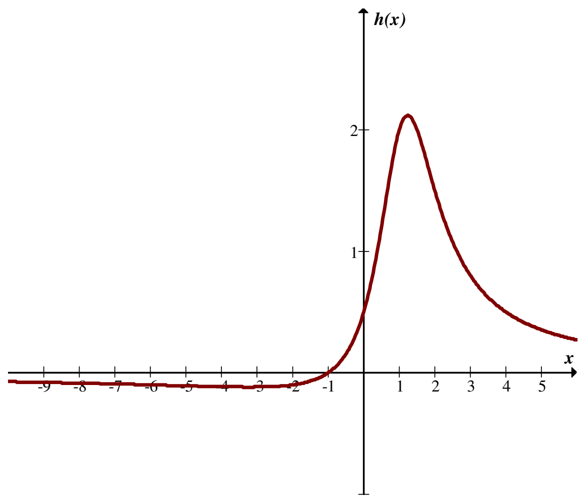
$$-x^2-2x+4=0$$

$$x^2+2x-4=0$$

$x_1=-1+\sqrt{5}$ e $x_2=-1-\sqrt{5}$ são pontos críticos

$h'(x)>0 \Leftrightarrow -x^2-2x+4>0 \Leftrightarrow x\in\left(-1-\sqrt{5},-1+\sqrt{5}\right).$

$\Rightarrow -1+\sqrt{5}$ é ponto de máximo e $-1-\sqrt{5}$ é ponto de mínimo.



k) $f(x)=(x+2)^2(x-1)^3$

$$f(x)=(x+2)^2\ (x-1)^3$$

$$f'(x)=(x+2)^2\ 3\,(x-1)^2+(x-1)^3\ 2\,(x+2)$$

$$=3\,(x+2)^2\ (x-1)^2+2\,(x-1)^3\ (x+2)$$

$$3\,(x+2)^2\ (x-1)^2+2\,(x-1)^3\ (x+2)=0$$

$$(x-1)^2\ \left[3\,(x+2)^2+2\,(x-1)\,(x+2)\right]=0$$

$$(x-1)^2\ (5x^2+14x+8)=0$$

$$(x-1)^2\left(x+\frac{4}{5}\right)(x+2)=0$$

$x=1, x=-\dfrac{4}{5}, x=-2$ são pontos críticos

Vamos usar o teste da derivada primeira.

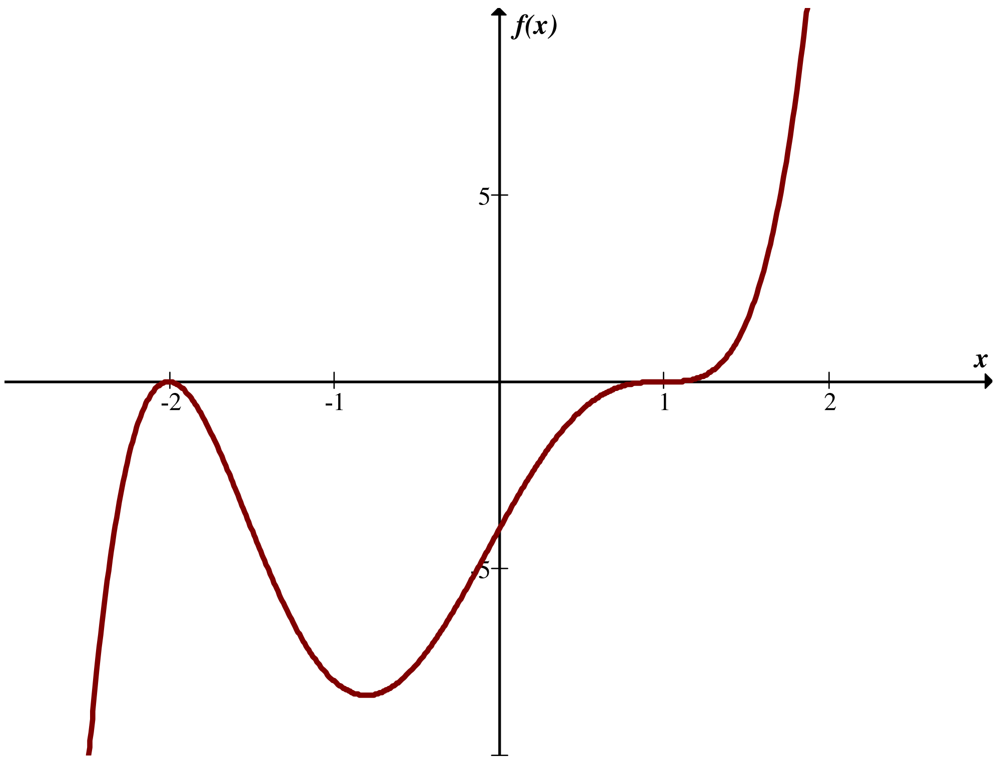
$f'(x) = (x-1)^2\ (5x^2 + 14x + 8) > 0$

$(x-1)^2 \geq 0$

$(5x^2 + 14x + 8) > 0$

$x < -2$ ou $x > -\dfrac{4}{5}$

Portanto, $x = -2$ é ponto de máximo e $x = -\dfrac{4}{5}$ é ponto de mínimo. $x = 1$ não é ponto de máximo nem de mínimo.



l) $f(x) = x^2\sqrt{16-x}$.

$f'(x) = x^2\ \dfrac{1}{2}\,(16-x)^{-1/2}\ (-1) + \sqrt{16-x}.2x$

$$-\frac{x^2}{2\sqrt{16-x}}+2x\sqrt{16-x}=0$$

$$\frac{-x^2+2x\,.\,2\,(16-x)}{2\sqrt{16-x}}=0$$

$$-x^2+64x-4x^2=0$$

$$5x^2-64=0$$

$$x\,(5x-64)=0$$

$x_1=0, x_2=\dfrac{64}{5}$ são pontos críticos

$$f'(x)>0$$

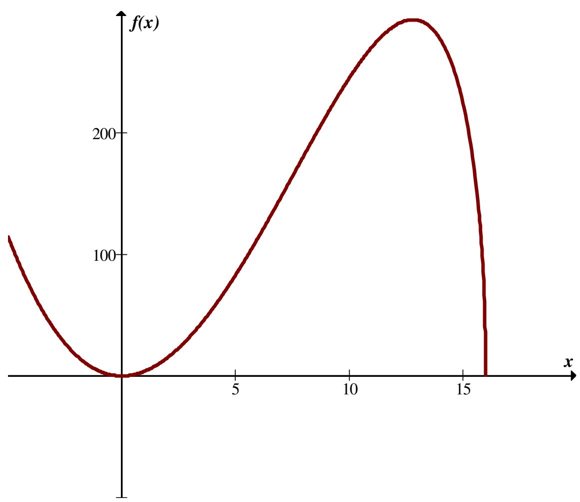
$$64x-5x^2>0$$

$$x\in\left(0,\frac{64}{5}\right)$$

Usando o teste da derivada primeira conclui-se que:

0 é ponto de mínimo

$\dfrac{64}{5}$ é ponto de máximo



10. Mostrar que $y=\dfrac{\log_a x}{x}$ tem seu valor máximo em $x=e$ (número neperiano) para todos os números $a>1$.

$$y=\frac{\log_a x}{x}$$

$$y' = \frac{x \frac{1}{x} \log_a e - \log_a x \cdot 1}{x^2}$$

$$= \frac{\log_a e - \log_a x}{x^2}$$

$$= \frac{\log_a \frac{e}{x}}{x^2}$$

$$\frac{\log_a \frac{e}{x}}{x^2} = 0$$

$$\log_a \frac{e}{x} = 0 \quad \Rightarrow \quad a^0 = \frac{e}{x}$$

$$1 = \frac{e}{x} \quad \therefore \quad x = e$$

$$y'' = \frac{x^2 \frac{\frac{-e}{x^2}}{\frac{e}{x}} \cdot \log_a e - \log_a \frac{e}{x} \cdot 2x}{x^4}$$

$$y'' = \frac{-\log_a e - 2 \log_a \frac{e}{x}}{x^3}$$

$$y''\Big|_{x=e} = \frac{-\log_a e - 2 \log_a 1}{e^3} = \frac{-\log_a e}{e^3} < 0 \text{ para a} > 1$$

$\Rightarrow x = e$ é ponto de máximo.

11. Determinar os coeficientes a e b de forma que a função $f(x) = x^3 + a.x^2 + b$ tenha um extremo relativo no ponto (-2,1).

$$f(x) = x^3 + ax^2 + b$$

$$f'(x) = 3x^2 + 2ax$$

$3x^2 + 2ax = 0$

$x\,(3x + 2a) = 0$

$x_1 = 0$

$3x + 2a = 0$

$3x = -2a$

$x_2 = \dfrac{-2a}{3}$

Para quaisquer valor de a e b $x = 0$ é um ponto crítico.

$x = \dfrac{-2a}{3}$ é ponto crítico.

$f''(x) = 6x + 2a$

$6x + 2a = 0$

$6x = -2a \quad \Rightarrow \quad x = \dfrac{-2a}{6} = \dfrac{-a}{3}$

$f''\left(\dfrac{-2a}{3}\right) = 6\left(\dfrac{-2a}{3}\right) + 2a = -2a \neq 0$ para a $\neq 0$.

Como o extremo deve estar no ponto (-2,1), segue que $\dfrac{-2a}{3} = -2 \Rightarrow a = 3$.

$1 = f(-2) = -8 + 12 + b \Rightarrow b = -3$.

12. Encontrar, a, b, c e d tal que a função $f(x) = 2ax^3 + bx^2 - cx + d$ tenha pontos críticos em $x = 0$ e $x = 1$. Se $a > 0$, qual deles é de máximo, qual é de mínimo?

$f(x) = 2ax^3 + bx^2 - cx + d$

$f'(x) = 6ax^2 + 2bx - c$

$6ax^2 + 2bx - c = 0$

$x_1 = 0$

$x_2 = 1$

Substituindo $x = 0$, vem

$-c = 0 \quad \Rightarrow \quad c = 0$

Substituindo $x = 1$, vem

$$6a+2b-c=0 \quad \Rightarrow \quad 6a+2b=0$$
$$3a+b=0$$
$$3a=-b$$
$$a=\frac{-b}{3}$$

$$f''(x)=12ax+2b$$
$$f''(0)=2b$$
$$f''(1)=12a+2b$$

Ainda podemos ter:

$$\begin{cases} d = \text{qualquer real} \\ \text{c} = 0 \\ \text{a} = \text{qualquer real} \\ \text{b} = \text{-3a} \end{cases}$$

Então se a > 0: $f''(0)=2b=2\,(-3a)=-6a$

$$f''(1)=12a+2\,(-3a)$$
$$=12a-6a=6a$$

$a>0 \quad \Rightarrow \quad$ 0 é ponto de máximo e 1 é ponto de mínimo .

13. Demonstrar que a função $y=ax^2+bx+c,\ x\in R$, tem máximo se, e somente se, $a<0$; e mínimo se, e somente se, $a>0$.

$$y=ax^2+bx+c$$
$$y'=2ax+b=0 \quad \Rightarrow \quad 2ax=-b$$
$$x=\frac{-b}{2a}$$

$$y''=2a$$

$$y''\Big|_{\frac{-b}{2a}}=2a\begin{cases} 2a>0 \Leftrightarrow a>0 \Rightarrow \dfrac{-b}{2a} \text{ é ponto de mínimo} \\ 2\text{a}<0 \Leftrightarrow a<0 \Rightarrow \dfrac{-b}{2a} \text{ é ponto de máximo} \end{cases}$$

14. Determinar os pontos de inflexão e reconhecer os intervalos onde as funções seguintes têm concavidade voltada para cima ou para baixo.

a) $f(x)=-x^3+5x^2-6x$

$f'(x) = -3x^2 + 10x - 6$
$f''(x) = -6x + 10$

$-6x + 10 > 0$
$-6x > -10$
$6x < 10$
$x < \dfrac{10}{6}$
$x < \dfrac{5}{3}$

Em $\left(-\infty, \dfrac{5}{3}\right)$ a função é côncava para cima

Em $\left(\dfrac{5}{3}, +\infty\right)$ a função é côncava para baixo

Em $x = \dfrac{5}{3}$ temos um ponto de inflexão. $\left(\dfrac{5}{3}, f\left(\dfrac{5}{3}\right)\right)$ é um ponto de inflexão.

b) $f(x) = 3x^4 - 10x^3 - 12x^2 + 10x + 9$

$f'(x) = 12x^3 - 30x^2 - 24x + 10$
$f''(x) = 36x^2 - 60x - 24$

$36x^2 - 60x - 24 > 0$
$3x^2 - 5x - 2 > 0$
$(x-2)\left(x + \dfrac{1}{3}\right) > 0$
$x < -1/3$ ou $x > 2$

$\left(-\dfrac{1}{3}, 2\right)$ côncava para baixo

$\left(-\infty, -\dfrac{1}{3}\right) \bigcup (2, +\infty)$ côncava para cima

Em $x_1 = -\dfrac{1}{3}$ $x_2 = 2$ temos pontos de inflexão.

Os pontos $\left(-\dfrac{1}{3}, f\left(-\dfrac{1}{3}\right)\right)$ e $(2, f(2))$ são pontos de inflexão.

c) $f(x) = \dfrac{1}{x+4}$

$$f'(x) = \frac{(x+4)\,0 - 1.1}{(x+4)^2} = \frac{-1}{(x+4)^2}$$

$$f''(x) = \frac{2\,(x+4)}{(x+4)^4} = \frac{2}{(x+4)^3}$$

$$f''(x) > 0$$

$$\frac{2}{(x+4)^3} > 0$$

$$(x+4)^3 > 0$$

$$x+4 > 0$$

$$x > -4$$

A função é côncava para cima em $(-4,+\infty)$ e côncava para baixo em $(-\infty,-4)$. Como o ponto $-4 \notin D(f)$, a função não tem pontos de inflexão.

d) $f(x) = 2xe^{-3x}$

$$f'(x) = 2x.e^{-3x}.(-3) + e^{-3x}.2$$
$$= -6x\,e^{-3x} + 2e^{-3x}$$
$$f''(x) = -6x\,e^{-3x}.(-3) + e^{-3x}.(-6) + 2e^{-3x}.(-3)$$
$$= 18x\,e^{-3x} - 6e^{-3x} - 6e^{-3x}$$
$$= 18x\,e^{-3x} - 12e^{-3x}$$

$$18x\,e^{-3x} - 12e^{-3x} > 0$$
$$e^{-3x}\,(18x - 12) > 0$$
$$18x - 12 > 0$$
$$18x > 12$$
$$x > \frac{12}{18} \quad \therefore \quad x > \frac{2}{3}$$

Temos que:

Em $\left(\frac{2}{3},+\infty\right)$ f é côncava para cima

Em $\left(-\infty,\frac{2}{3}\right)$ f é côncava para baixo

Em $x = \frac{2}{3}$ temos um ponto de inflexão e $\left(\frac{2}{3}, f\left(\frac{2}{3}\right)\right)$ é o ponto de inflexão.

e) $f(x) = x^2 e^x$

$$f'(x) = x^2.e^x + e^x.2x$$
$$f''(x) = x^2.e^x + e^x.2x + e^x.2 + 2xe^x$$
$$= x^2.e^x + 4x.e^x + 2e^x$$
$$= e^x\left(x^2 + 4x + 2\right)$$

$$e^x\left(x^2 + 4x + 2\right) > 0$$
$$x^2 + 4x + 2 > 0$$

Em $\left(-2-\sqrt{2}, -2+\sqrt{2}\right)$ f é côncava para baixo.
Em $\left(-\infty, -2-\sqrt{2}\right) \cup \left(-2+\sqrt{2}, +\infty\right)$ f é côncava para cima.
Em $x = -2 \pm \sqrt{2}$ temos pontos de inflexão.

f) $f(x) = 4\sqrt{x+1} - \dfrac{\sqrt{2}}{2}x^2 - 1$

$$f'(x) = \frac{4}{2\sqrt{x+1}} - \frac{\sqrt{2}}{2}\,2x$$
$$= \frac{2}{\sqrt{x+1}} - \sqrt{2}\,x$$
$$f''(x) = 2.\left(-\frac{1}{2}\right)\,(x+1)^{-3/2} - \sqrt{2}$$
$$= \frac{-1-\sqrt{2}\sqrt{(x+1)^3}}{\sqrt{(x+1)^3}}$$

$$f''(x) < 0$$

$$-1-\sqrt{2}.\sqrt{(x+1)^3} < 0$$
$$-1 < \sqrt{2}.\sqrt{(x+1)^3}$$, o que ocorre para todo $x \in D(f)$

Assim, a derivada de segunda ordem da função é sempre menor que zero. Não existe ponto de inflexão e a função é côncava para baixo em todo o seu domínio.

g) $f(t) = \dfrac{t^2+9}{(t-3)^2}$

$$f'(t)=\frac{(t-3)^2.2t-(t^2+9).2\,(t-3)}{(t-3)^4}$$

$$=\frac{(t-3)\left[(t-3).2t-2\,(t^2+9)\right]}{(t-3)^4}$$

$$=\frac{2t^2-6t-2t^2-18}{(t-3)^3}$$

$$=\frac{-6t-18}{(t-3)^3}$$

$$f''(t)=\frac{(t-3)^3(-6)-(-6t-18).3\,(t-3)^2}{(t-3)^6}$$

$$=\frac{12t+72}{(t-3)^4}$$

$$f''(t)>0$$

$$\frac{12t+72}{(t-3)^4}>0$$

$$12t+72>0$$

$$12t>-72$$

$$t>-6$$

Em $t=-6$ temos um ponto de inflexão.

A função em:

$(-6,+\infty)$ é côncava para cima;
$(-\infty,-6)$ é côncava para baixo.

h) $f(t)=e^{-t}\cos t,\quad t\in[0,2\pi]$

$$f'(t)=e^{-t}(-sen\,t)-\cos t\;e^{-t}=e^{-t}(-sen\,t-\cos t)$$

$$f''(t)=e^{-t}\left(-\cos t+sen\,t\right)-e^{-t}(-sen\,t-\cos t)$$

$$=2e^{-t}sen\,t$$

$$f''(t)>0$$

$sen\,t>0 \quad\Rightarrow\quad t\in(0,\pi) \quad\Rightarrow f$ é côncava para cima em $[0,\pi]$
$sen\,t<0 \quad\Rightarrow\quad t\in(\pi,2\pi) \quad\Rightarrow f$ é côncava para baixo em $[\pi,2\pi]$
$\left(\pi,-e^{-\pi}\right)$ é ponto de inflexão .

i) $$f(x) = \begin{cases} 2x - x^2, & x < 1 \\ x \quad , & x \geq 1 \end{cases}$$

$$f'(x) = \begin{cases} 2 - 2x, & x < 1 \\ 1 \quad , & x > 1 \end{cases}$$

$$f''(x) = \begin{cases} -2, & x < 1 \\ 0 \ , & x > 1 \end{cases}$$

$f''(x) > 0$ não temos valores.
$f''(x) < 0$ para $x \in (-\infty, 1)$; f é côncava para baixo neste intervalo
$\nexists$ pontos de inflexão.

j) $$f(x) = \begin{cases} x^2 - 4, & x \leq 2 \\ 4 - x^2, & x > 2 \end{cases}$$

$$f'(x) = \begin{cases} 2x, & x < 2 \\ -2x, & x > 2 \end{cases}$$

$$f''(x) = \begin{cases} 2, & x < 2 \\ -2, & x > 2 \end{cases}$$

$f''(x) > 0$ para $x \in (-\infty, 2)$ $\Rightarrow f$ é côncava para cima neste intervalo
$f''(x) < 0$ para $x \in (2, +\infty)$ $\Rightarrow f$ é côncava para baixo neste intervalo

$(2,0)$ é um ponto de inflexão.

15. Seguindo as etapas apresentadas em 5.9.1. fazer um esboço do gráfico das seguintes funções:

(a) $y = x^2 + 4x + 2$

Etapa 1: Encontrar $D(f)$.

O domínio da função dada é o conjunto dos números reais.

Etapa 2: Calcular os pontos de intersecção com os eixos (Quando não requer muito cálculo).

$x = 0 \quad \Rightarrow \quad y = 2$

$y = 0 \quad \Rightarrow \quad x^2 + 4x + 2 = 0$

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{16-8}}{2} = \frac{-4 \pm \sqrt{8}}{2} = -2 \pm \sqrt{2}$$

$x_1 \cong -0{,}5 \qquad x_2 \cong -3{,}4$

Etapa 3: Encontrar os pontos críticos.

$y' = 2x + 4$

$2x + 4 = 0$

$2x = -4$

$x = -\frac{4}{2}$

$x = 2 \quad \Rightarrow \quad y = (-2)^2 4.(-2) + 2$

$= 4 - 8 + 2 = -2$

Em *x=2* temos um ponto crítico.

Etapa 4: Determinar os intervalos de crescimento e decrescimento.

A função é crescente para $x \geq 2$ e decrescente para $x \leq 2$.

Etapa 5: Encontrar os máximos e mínimos relativos.

Como $y'' = 2 > 0$, temos um ponto de mínimo relativo em $x = 2$.

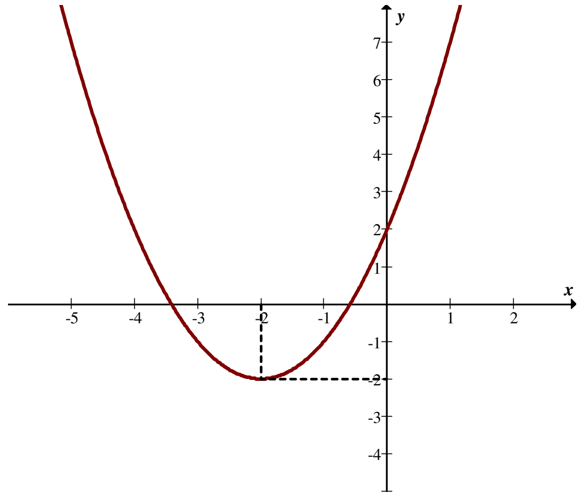
Etapa 6: Determinar a concavidade e os pontos de inflexão.

A função tem a concavidade para cima.

Etapa 7 Encontrar as assíntotas horizontais e verticais se existirem.

Não há assíntotas

Etapa 8: Esboçar o gráfico



(b) $y = \dfrac{-x^3}{3} + \dfrac{3x^2}{2} - 2x + \dfrac{5}{6}$

Etapa 1: Encontrar $D(f)$.

O domínio da função é o conjunto dos números reais.

Etapa 2: Calcular os pontos de intersecção com os eixos (Quando não requer muito cálculo).

Quando $x = 0$ temos que $y = \dfrac{5}{6}$.

Quando $y = 0$ temos $\dfrac{-x^3}{3} + \dfrac{3x^2}{2} - 2x + \dfrac{5}{6} = 0$. Resolvendo esta equação obtemos 5/2 e 1.

Etapa 3: Encontrar os pontos críticos.

$$\begin{aligned} y' &= \frac{-3x^2}{3} + \frac{3.2x}{2} - 2 \\ &= -x^2 + 3x - 2 \end{aligned}$$

$$-x^2 + 3x - 2 = 0$$
$$x_1 = 2 \qquad x_2 = 1$$

Etapa 4: Determinar os intervalos de crescimento e decrescimento.

$$-x^2 + 3x - 2 > 0$$

é crescente em $[1,2]$

é decrescente em $(-\infty,1] \cup [2,+\infty)$

Etapa 5: Encontrar os máximos e mínimos relativos.

$y'' = -2x + 3$

Para $x = 2$ temos que $y'' = -1$, o que nos dá um ponto de máximo em $x = 2$.

Para $x = 1$ temos que $y'' = 1$, o que nos dá um ponto de mínimo em $x = 1$.

Etapa 6: Determinar a concavidade e os pontos de inflexão.

$$-2x + 3 > 0$$
$$-2x > -3$$
$$x < 3/2$$

A função é côncava para cima em $\left(-\infty, \frac{3}{2}\right)$. .

$$-2x + 3 < 0$$
$$-2x < -3$$
$$x > 3/2$$

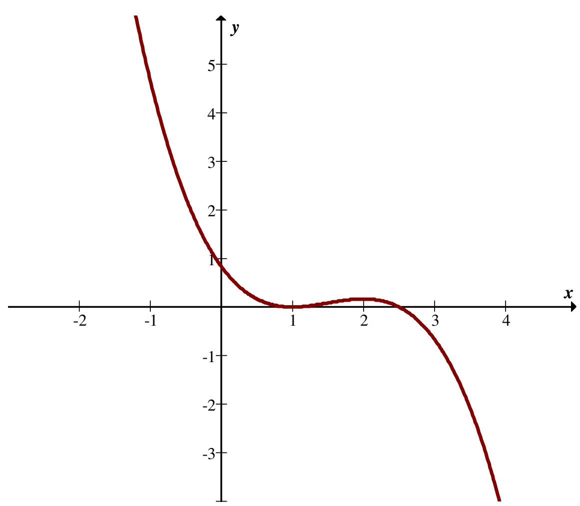
A função é côncava para baixo em $\left(\frac{3}{2}, +\infty\right)$.

Em $x = \frac{3}{2}$ temos um ponto de inflexão

Etapa 7 Encontrar as assíntotas horizontais e verticais se existirem.

Não temos assíntotas.

Etapa 8: Esboçar o gráfico



(c) $y = \frac{-1}{4}x^4 + \frac{5}{3}x^3 - 2x^2$

Etapa 1: Encontrar $D(f)$.

O domínio desta função é o conjunto dos números reais.

Etapa 2: Calcular os pontos de intersecção com os eixos (Quando não requer muito cálculo).

Fazendo $x = 0$ obtemos $y = 0$. Fazendo $y = 0$ vamos ter a equação $\frac{-1}{4}x^4 + \frac{5}{3}x^3 - 2x^2 = 0$ que ao ser resolvida obtém-se os valores: 0 e $\frac{10 \pm 2\sqrt{7}}{3}$.

Etapa 3: Encontrar os pontos críticos.

$y' = -x^3 + 5x^2 - 4x$

$$\begin{aligned} -x^3 + 5x^2 - 4x &= 0 \\ x^3 - 5x^2 + 4x &= 0 \\ x(x^2 - 5x + 4) &= 0 \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} x_1 &= 0 \\ x_2 &= 4 \\ x_3 &= 1 \end{aligned}$$

são os pontos críticos.

Etapa 4: Determinar os intervalos de crescimento e decrescimento.

Temos:

Crescimento: $(-\infty,0) \cup (1,4)$.

Decrescimento: $(0,1) \cup (4,+\infty)$.

Etapa 5: Encontrar os máximos e mínimos relativos.

$y'' = -3x^2 + 10x - 4$

$y''\big|_0 = -4$. Assim, em $x = 0$ temos um ponto de máximo.

$y''\big|_4 = -48 + 40 - 4 = -12$. Assim, em $x = 4$ temos um ponto de máximo.

$y''\big|_1 = -3+10-4 = 3$. Assim, em $x = 1$ temos um ponto de mínimo.

$f(0) = 0$

$f(4) = -64 + 106{,}6 - 32 = 10{,}6$

$f(1) = -\frac{1}{4} + \frac{5}{3} - 2 = \frac{-3+20-24}{12} = \frac{-7}{12} = -0{,}58$

Etapa 6: Determinar a concavidade e os pontos de inflexão.

$y'' = -3x^2 + 10x - 4$

$x_1 = \frac{10+\sqrt{52}}{6} = 2{,}8$

$x_2 = \frac{10-\sqrt{52}}{6} = 0{,}46$

$-3x^2 + 10x - 4 > 0 \quad \Rightarrow \quad (0.46,\ 2.8)$ concavidade para cima.

$-3x^2 + 10x - 4 < 0 \quad \Rightarrow \quad (-\infty,\ 0.46) \cup (2.8,\ +\infty)$ concavidade para baixo.

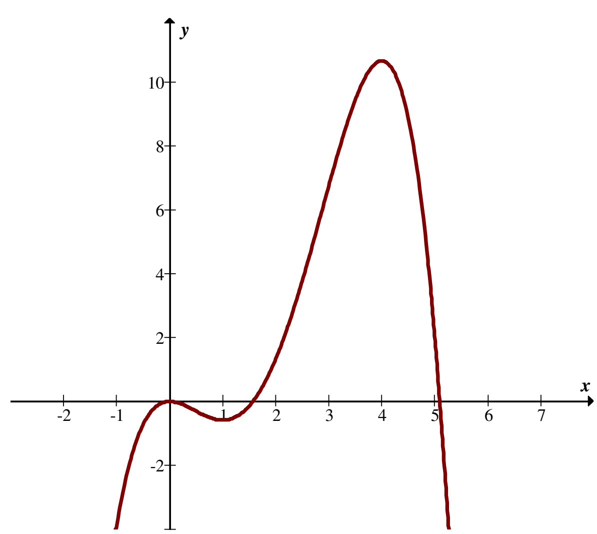
$f(0{,}4) = -\frac{0{,}0256}{4} + 0{,}10 - 0{,}32 = -0{,}22$

$f(2{,}8) = -15{,}3 + 36{,}5 - 15{,}6 = 5{,}6$

Etapa 7 Encontrar as assíntotas horizontais e verticais se existirem.

Não tem assíntotas.

Etapa 8: Esboçar o gráfico



(d) $y = x + \dfrac{2}{x} \quad = \dfrac{x^2+2}{x}$

Etapa 1: Encontrar $D(f)$.

$D(f) = IR - \{0\}$.

Etapa 2: Calcular os pontos de intersecção com os eixos (Quando não requer muito cálculo).

Não corta os eixos.

Etapa 3: Encontrar os pontos críticos.

$$y' = 1 + \frac{-2}{x^2} = \frac{x^2-2}{x^2}$$

$$\frac{x^2-2}{x^2} = 0 \qquad \therefore \qquad x^2 - 2 = 0$$

$$x^2 = 2$$

$$x = \pm\sqrt{2}$$

Etapa 4: Determinar os intervalos de crescimento e decrescimento.

Em $\left(-\infty, -\sqrt{2}\right] \cup \left[\sqrt{2}, +\infty\right)$ a função é crescente.
Em $\left(-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right)$ a função é decrescente.

Etapa 5: Encontrar os máximos e mínimos relativos.

$$y'' = \frac{4}{x^3}$$

Temos em $x = \sqrt{2}$ um ponto de mínimo e em $x = -\sqrt{2}$ um ponto de máximo

$$f\left(-\sqrt{2}\right) = -\sqrt{2} - \frac{2}{\sqrt{2}} = -\sqrt{2} - \sqrt{2} = -2\sqrt{2} = -2{,}8$$

$$f\left(+\sqrt{2}\right) = \sqrt{2} + \frac{2}{\sqrt{2}} = +2\sqrt{2} = 2{,}8$$

Etapa 6: Determinar a concavidade e os pontos de inflexão.

Côncava para cima em $(0, +\infty)$;

Côncava para baixo em $(-\infty, 0)$.

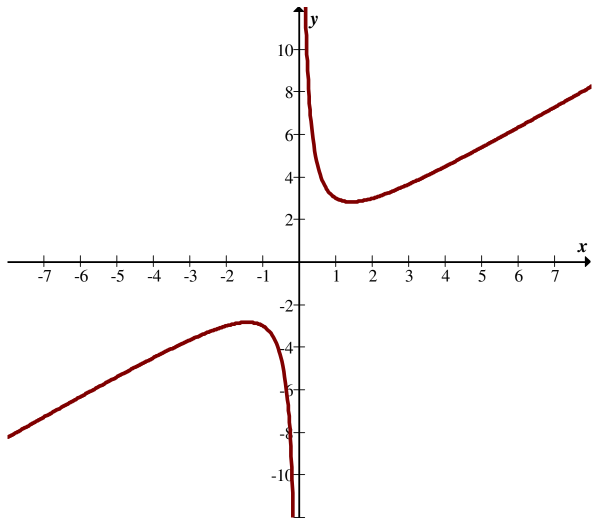
Etapa 7 Encontrar as assíntotas horizontais e verticais se existirem.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+2}{x}=\infty$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2+2}{x}=\infty$$

Temos que $x=0$ é uma assíntota vertical.

Etapa 8: Esboçar o gráfico



(e) $y=\dfrac{3x+1}{(x+2)(x-3)}$

Etapa 1: Encontrar $D(f)$.

$D(f)=IR-\{-2,3\}$.

Etapa 2: Calcular os pontos de intersecção com os eixos (Quando não requer muito cálculo).

Fazendo $y = 0$ temos que $x=-\dfrac{1}{3}$. Fazendo $x=0$ temos $y=-\dfrac{1}{6}$.

Etapa 3: Encontrar os pontos críticos.

$$y'=-\frac{3x^2+2x+17}{(x+2)^2(x-3)^2}$$

$3x^2+2x+17=0$, tem somente raízes complexas. Assim não temos pontos críticos.

Etapa 4: Determinar os pontos de crescimento e decrescimento.

A função é sempre decrescente.

Etapa 5: Encontrar os máximos e mínimos relativos.

Não se têm máximos nem mínimos.

Etapa 6: Determinar a concavidade e os pontos de inflexão.

$$y'' = \frac{2(3x^3 + 3x^2 + 51x - 11)}{(x+2)^3 (x-3)^3}$$

Analisando o sinal dessa derivada vamos obter:

Concavidade para cima: $(-2;0,21) \cup (3,+\infty)$.

Concavidade para baixo: $(-0,21;3) \cup (-\infty,-2)$.

Etapa 7 Encontrar as assíntotas horizontais e verticais se existirem.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{3x+1}{(x+2)\,(x-3)} = 0$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{3x+1}{(x+2)\,(x-3)} = 0$$

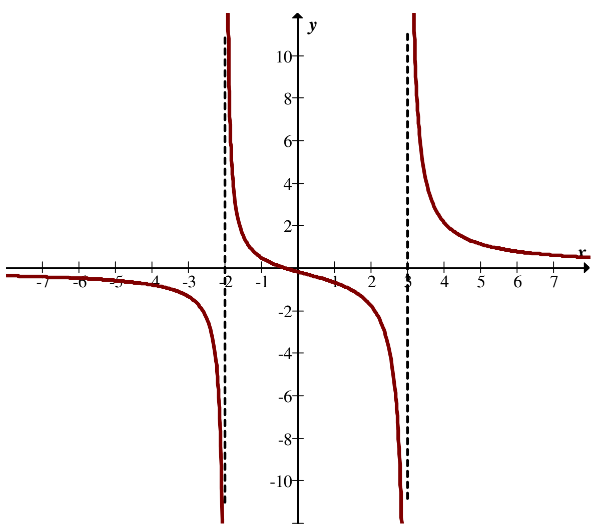
$$\lim_{x\to-2} \frac{3x+1}{(x+2)\,(x-3)} = \infty$$

$$\lim_{x\to3} \frac{3x+1}{(x+2)\,(x-3)} = \infty$$

Temos duas assíntotas verticais $x = -2$ e $x = 3$.

Temos uma assíntota horizontal em $y = 0$.

Etapa 8: Esboçar o gráfico



(f) $y = \dfrac{4}{\sqrt{x+2}}$

Etapa 1: Encontrar $D(f)$.

$$D(f) = (-2, +\infty)$$

Etapa 2: Calcular os pontos de intersecção com os eixos (Quando não requer muito cálculo).

Não corta o eixo dos *x*. Corta o eixo dos y em $y = 2\sqrt{2}$.

Etapa 3: Encontrar os pontos críticos.

$y' = \dfrac{-2}{(x+2)^{3/2}}$. Não temos pontos críticos.

Etapa 4: Determinar os intervalos de crescimento e decrescimento.

É sempre decrescente.

Etapa 5: Encontrar os máximos e mínimos relativos.

Não têm máximos nem mínimos.

Etapa 6: Determinar a concavidade e os pontos de inflexão.

$$y'' = \frac{3}{(x+2)^{5/2}} > 0$$

Não tem pontos de inflexão. A concavidade é voltada para cima.

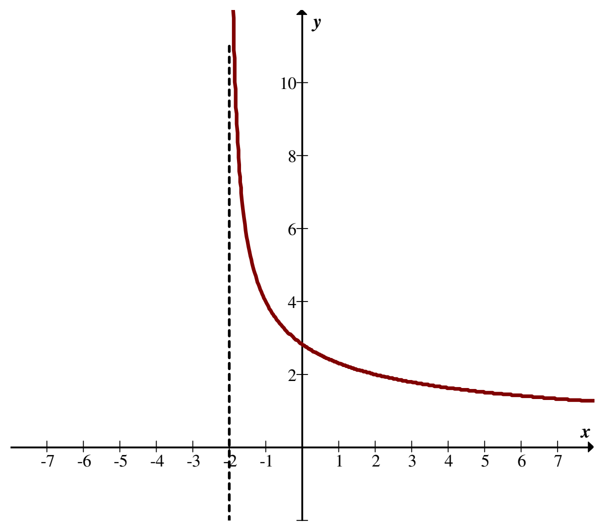
Etapa 7 Encontrar as assíntotas horizontais e verticais se existirem.

$$\lim_{x \to -2} \frac{4}{\sqrt{x+2}} = \infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{4}{\sqrt{x+2}} = 0$$

Temos que $x = -2$ é uma assíntota vertical e $y = 0$ é uma assíntota horizontal.

Etapa 8: Esboçar o gráfico



(g) $y = x^{3/2}$

Etapa 1: Encontrar $D(f)$.

$D(f) = [0, +\infty)$.

Etapa 2: Calcular os pontos de intersecção com os eixos (Quando não requer muito cálculo).

Encontra os eixos em $(0,0)$.

Etapa 3: Encontrar os pontos críticos.

$$y' = \frac{3}{2}x^{1/2}$$

$$\frac{3}{2}x^{1/2} = 0$$
$$x^{1/2} = 0$$
$$\sqrt{x} = 0$$
$$x = 0$$

Em $x = 0$ temos um ponto crítico.

Etapa 4: Determinar os intervalos de crescimento e decrescimento.

$$\frac{3}{2}x^{1/2} > 0$$
$$x^{1/2} > 0$$
$$\sqrt{x} > 0$$
$$x > 0$$

A função é sempre crescente.

Etapa 5: Encontrar os máximos e mínimos relativos.

Não têm máximos nem mínimos.

Etapa 6: Determinar a concavidade e os pontos de inflexão.

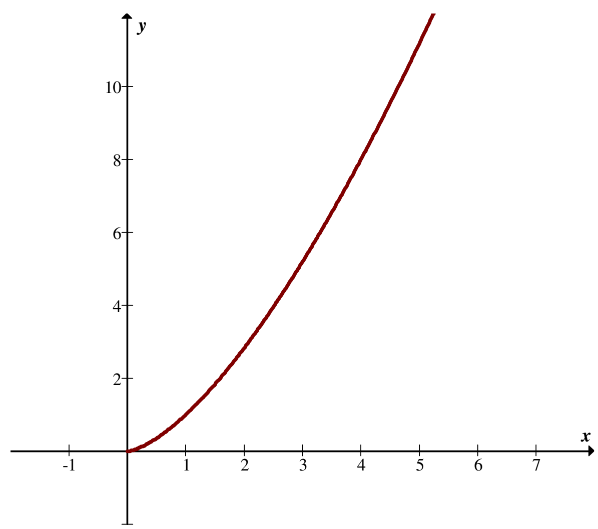
$$y'' = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} x^{-1/2} = \frac{3}{4\sqrt{x}}$$

A função é côncava para cima.

Etapa 7 Encontrar as assíntotas horizontais e verticais se existirem.

Não tem assíntotas.

Etapa 8: Esboçar o gráfico



(h) $y = \ln(2x+3)$

Etapa 1: Encontrar $D(f)$.

$D(f) = (-3/2, +\infty)$.

Etapa 2: Calcular os pontos de intersecção com os eixos (Quando não requer muito cálculo).

Quando $x = 0$ temos que $y = \ln 3$. Para $y = 0$ temos $x = -1$.

Etapa 3: Encontrar os pontos críticos.

$$y' = \frac{2}{2x+3}$$

$\frac{2}{2x+3} = 0$. Não temos pontos críticos.

Etapa 4: Determinar os intervalos de crescimento e decrescimento.

$$\frac{2}{2x+3} > 0$$
$$2x+3 > 0$$
$$x > -\frac{3}{2}$$

A função é sempre crescente.

Etapa 5: Encontrar os máximos e mínimos relativos.

Não tem máximos nem mínimos.

Etapa 6: Determinar a concavidade e os pontos de inflexão.

$$y'' = \frac{-2.2}{(2x+3)^2} = \frac{-4}{(2x+3)^2} < 0$$

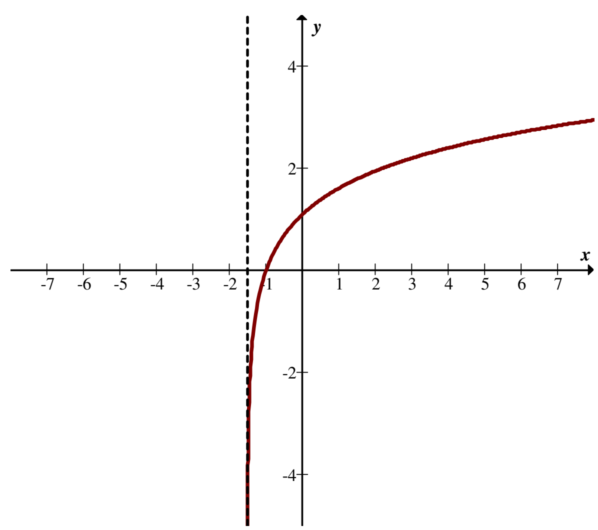
A função é côncava para baixo.

Etapa 7 Encontrar as assíntotas horizontais e verticais se existirem.

$$\lim_{x \to -3/2} \ln(2x+3) = -\infty$$

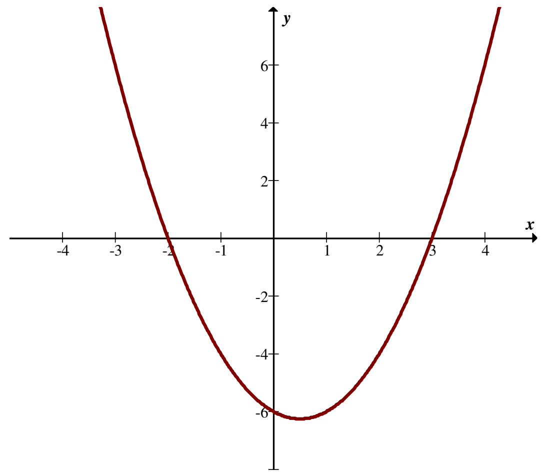
Assim em $x = -3/2$ temos uma assíntota vertical.

Etapa 8: Esboçar o gráfico



16. Usando uma ferramenta gráfica, construir o gráfico das funções seguintes, analisando suas propriedades e características como apresentado em 5.9.3

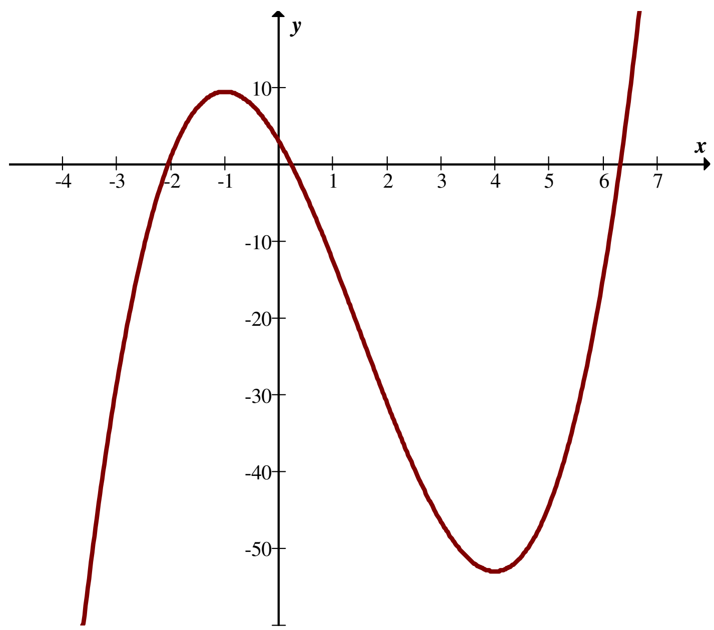
(a) $y = (x-3)(x+2)$



Etapa	Procedimento	Resultado da análise visual
1	Construção do gráfico	Gráfico representado acima desta tabela
2	Domínio da função	Conjunto dos reais
3	Conjunto Imagem	[-6,2;+∞)
4	Raízes reais	3 e -2
5	Pontos críticos e extremos	Vértice como ponto de mínimo: (1/2; -6,2)
6	Intervalos de crescimento	$(1/2,+\infty)$
	Intervalos de decrescimento	$(-\infty,1/2)$
7	Concavidade	côncava para cima
	Pontos de inflexão	Não tem

8	Assíntotas verticais	Não tem
	Assíntotas horizontais	Não tem

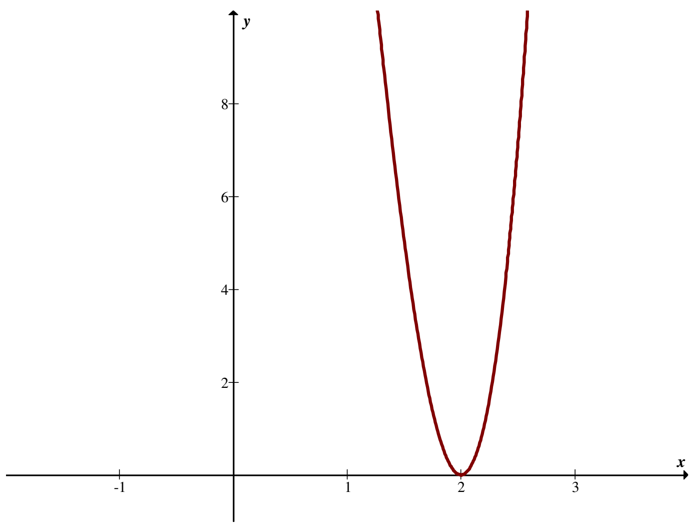
(b) $y = x^3 - \frac{9}{2}x^2 - 12x + 3$



Etapa	Procedimento	Resultado da análise visual
1	Construção do gráfico	Gráfico representado acima desta tabela
2	Domínio da função	Conjunto dos reais
3	Conjunto Imagem	Conjunto dos reais
4	Raízes reais	aproximadamente em 0,2; 6,3 e -2,1.
5	Pontos críticos e extremos	Ponto de máximo em $x = -1$. Ponto de mínimo em $x = 4$.

6	Intervalos de crescimento	$(-\infty,-1)$ *e* $(4,+\infty)$
	Intervalos de decrescimento	$(-1,4)$
7	Concavidade	côncava para cima em $(1{,}5;+\infty)$ e côncava para baixo em $(-\infty;1{,}5)$.
	Ponto de inflexão	Em $x = 1{,}5$
8	Assíntotas verticais	Não tem
	Assíntotas horizontais	Não tem

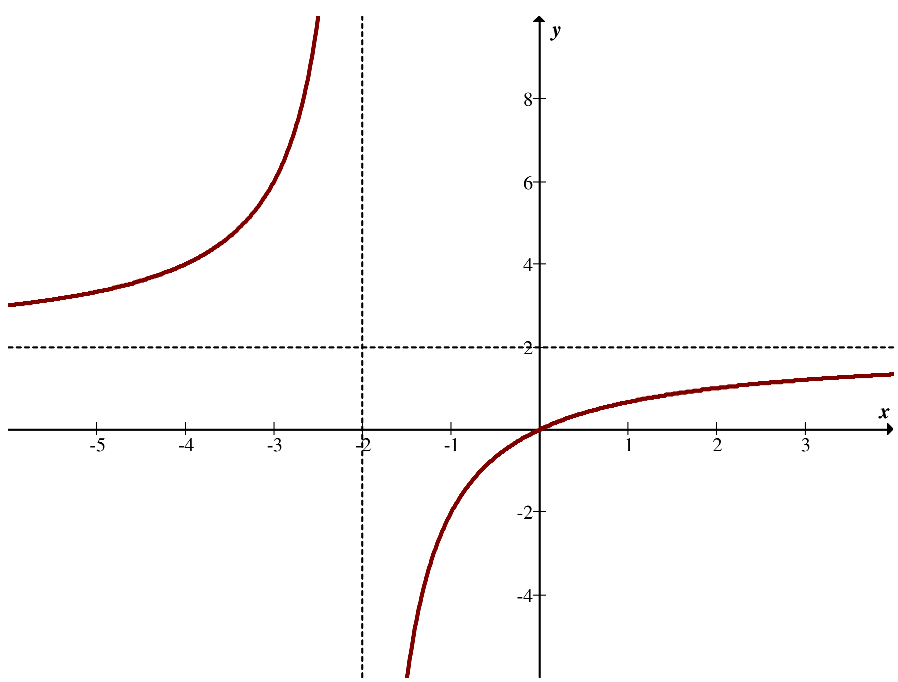
(c) $y = x^4 - 32x + 48$



Etapa	Procedimento	Resultado da análise visual
1	Construção do gráfico	Gráfico representado acima desta tabela
2	Domínio da função	Conjunto dos reais
3	Conjunto Imagem	$(0,+\infty)$
4	Raízes reais	$x=2$

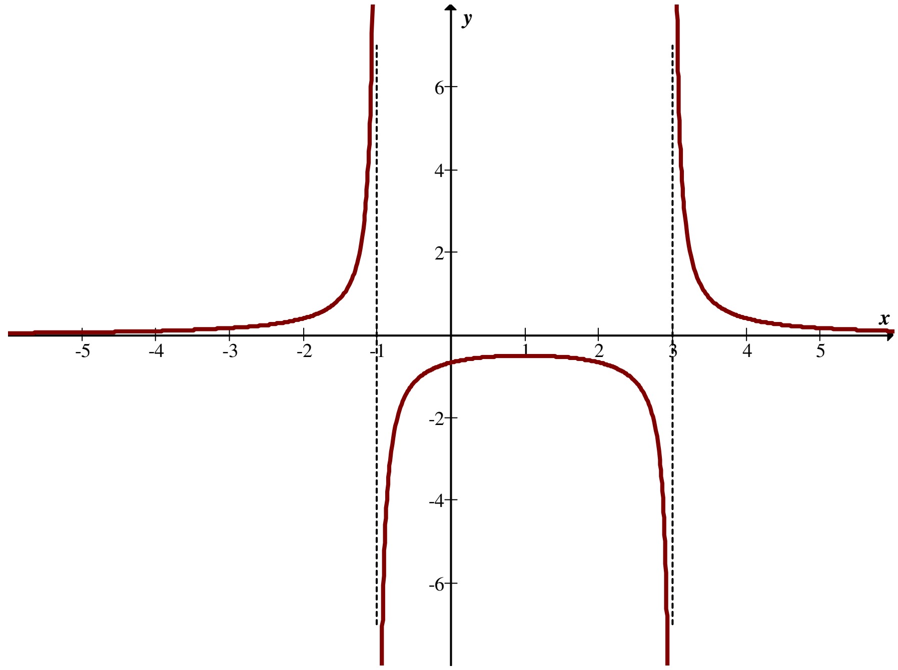
5	Pontos críticos e extremos	Ponto de mínimo em $x = 2$.
6	Intervalos de crescimento	$(2,+\infty)$
	Intervalos de decrescimento	$(-\infty,2)$
7	Concavidade	côncava para cima em todo o seu domínio
	Pontos de inflexão	não tem
8	Assíntotas verticais	Não tem
	Assíntotas horizontais	Não tem

(d) $y = \dfrac{2x}{x+2}$



Etapa	Procedimento	Resultado da análise visual
1	Construção do gráfico	Gráfico representado acima desta tabela
2	Domínio da função	$IR-\{-2\}$
3	Conjunto Imagem	$IR-\{2\}$
4	Raízes reais	$x=0$
5	Pontos críticos e extremos	não tem
6	Intervalos de crescimento	em todo o seu domínio
	Intervalos de decrescimento	não tem
7	Concavidade	côncava para cima em $(-\infty,-2)$ e côncava para baixo em $(-2,+\infty)$.
	Pontos de inflexão	não tem ponto de inflexão no seu domínio
8	Assíntotas verticais	$x=-2$
	Assíntotas horizontais	$y=2$

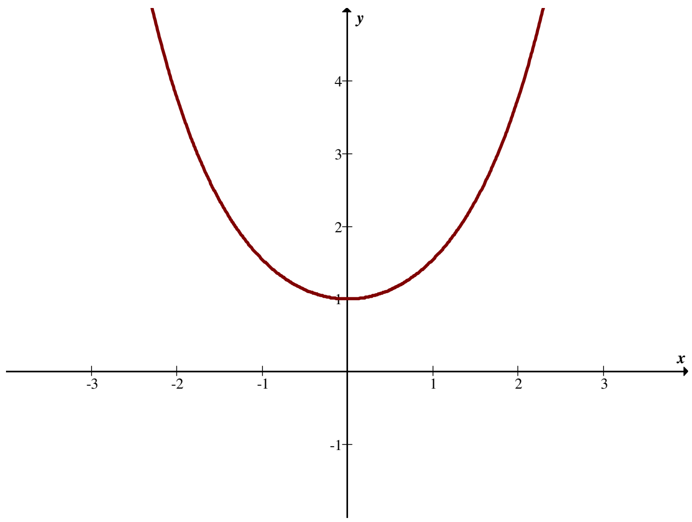
(e) $y=\dfrac{2}{x^2-2x-3}$



Etapa	Procedimento	Resultado da análise visual
1	Construção do gráfico	Gráfico representado acima desta tabela
2	Domínio da função	$IR-\{-1,3\}$
3	Conjunto Imagem	$IR-\{0\}$
4	Raízes reais	não tem
5	Pontos críticos e extremos	$x=1$ é um ponto de máximo relativo
6	Intervalos de crescimento	$(-\infty,-1)$ e $(-1,1)$
	Intervalos de decrescimento	$(1,3)$ e $(3,+\infty)$
7	Concavidade	côncava para cima em $(-\infty,-1)$ e $(3,+\infty)$ e côncava para baixo em $(-1,3)$.
	Pontos de inflexão	não tem ponto de inflexão no seu domínio
8	Assíntotas verticais	$x=-1$ e $x=3$

	Assíntotas horizontais	$y = 0$

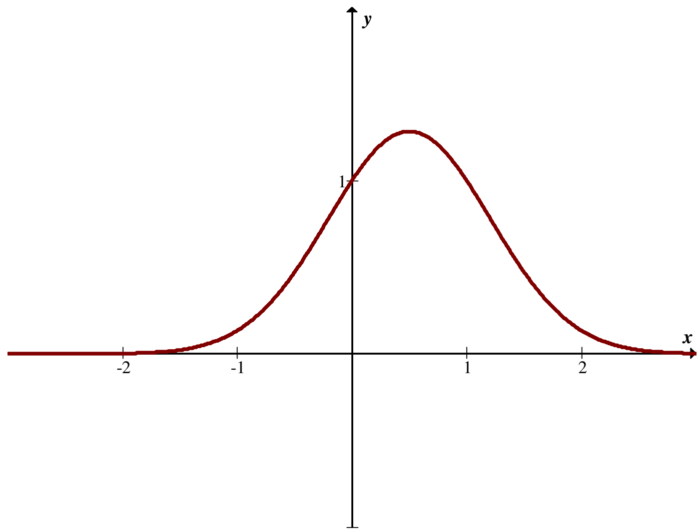
(f) $y = \cosh x$



Etapa	**Procedimento**	**Resultado da análise visual**
1	Construção do gráfico	Gráfico representado acima desta tabela
2	Domínio da função	IR
3	Conjunto Imagem	$[1,+\infty)$
4	Raízes reais	não tem
5	Pontos críticos e extremos	$x = 0$ é um ponto de mínimo
6	Intervalos de crescimento	$(0,+\infty)$
	Intervalos de decrescimento	$(-\infty,0)$
7	Concavidade	côncava para cima em todo o seu domínio.
	Pontos de inflexão	não tem ponto de inflexão.

8	Assíntotas verticais	não tem.
	Assíntotas horizontais	não tem.

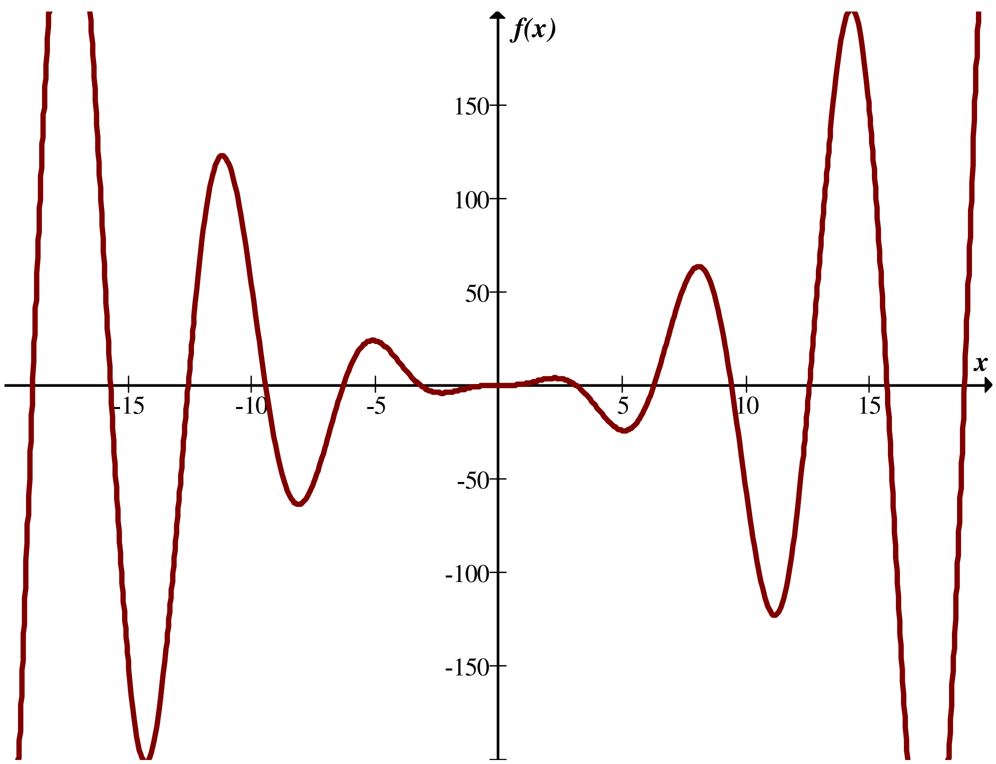
(g) $y = e^{x-x^2}$

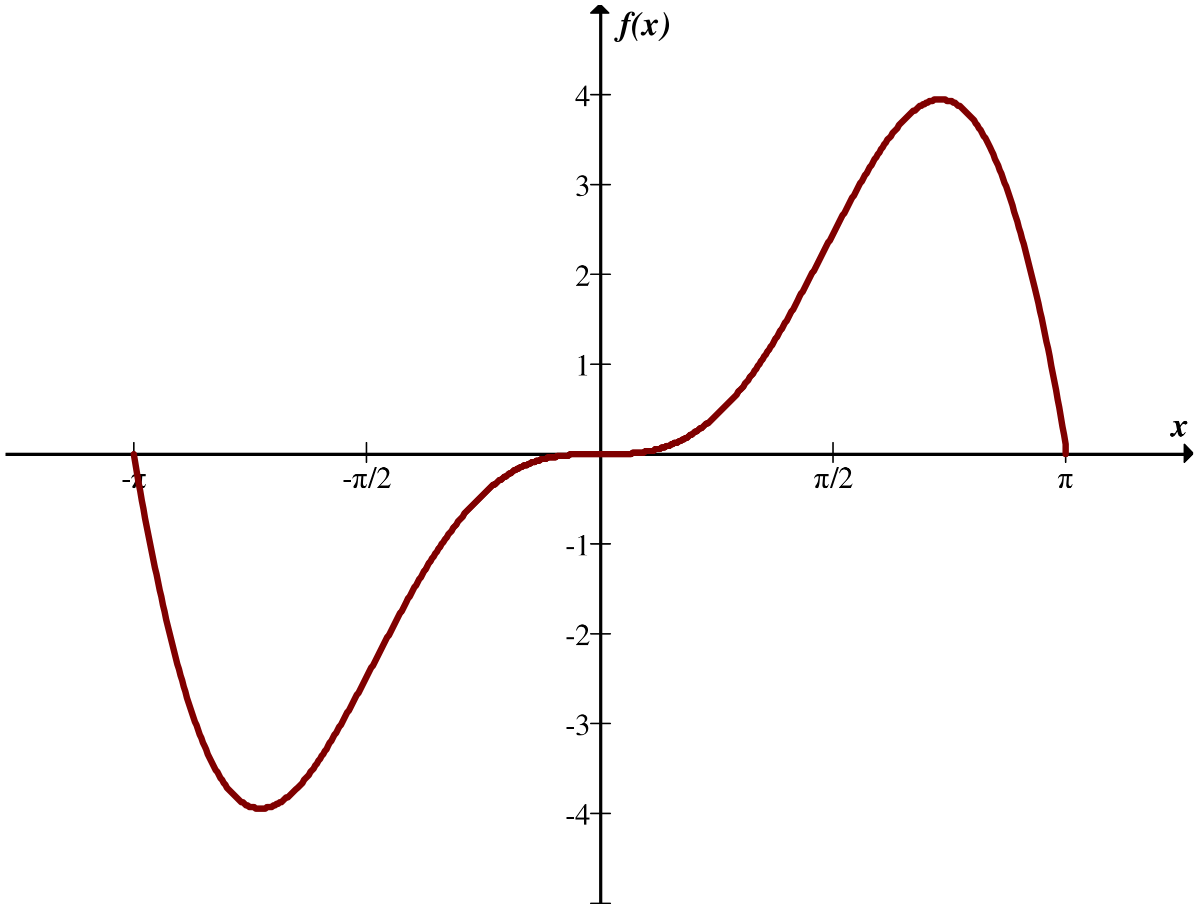


Etapa	Procedimento	Resultado da análise visual
1	Construção do gráfico	Gráfico representado acima desta tabela
2	Domínio da função	IR
3	Conjunto Imagem	$(0, e^{1/4}) \cong (0;1,28)$
4	Raízes reais	não tem
5	Pontos críticos e extremos	$x = 1/2$ é um ponto de máximo
6	Intervalos de crescimento	$(-\infty, 1/2)$
	Intervalos de decrescimento	$(1/2, +\infty)$

7	Concavidade	côncava para baixo em $(0{,}21;1{,}21)$ côncava para cima em $(-\infty;0{,}21)\cup(1{,}21;+\infty)$
	Pontos de inflexão	Em -0,21 e 1,21
8	Assíntotas verticais	não tem.
	Assíntotas horizontais	$y=0$.

(h) $f(x)=x^2 senx$

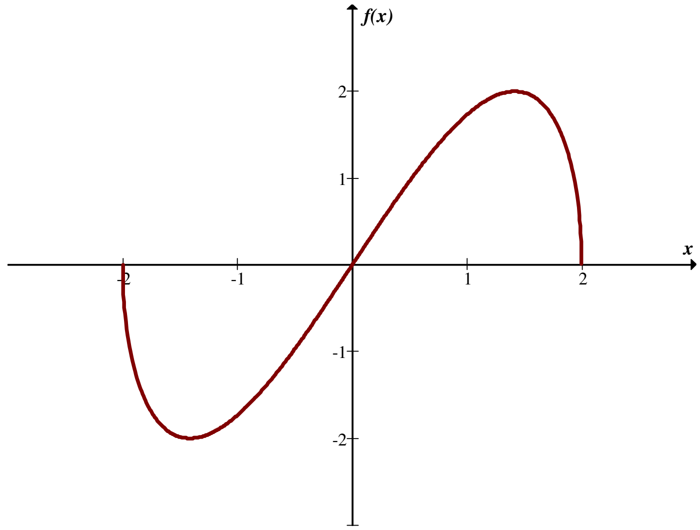




Etapa	Procedimento	Resultado da análise visual
1	Construção do gráfico	As figuras acima mostram o gráfico da função. Observar que no segundo gráfico apresentamos um detalhamento no intervalo $[-\pi,\pi]$, para fazer uma análise mais detalhada da função. É importante sempre lembrar que graficamente temos condições de analisar somente o que está visualizado. Daí a importância do conhecimento teórico obtido via uso de teoremas.
2	Domínio da função	IR
3	Conjunto Imagem	IR

4	Raízes reais	Temos infinitas raízes. Especificamente no intervalo $[-\pi, \pi]$ temos: $x = -\pi,\ x = 0\ e\ x = \pi$.
5	Pontos críticos e extremos	Temos infinitos. Especificamente observa-se no intervalo $[-\pi, \pi]$ um ponto de máximo (denotado aqui por $x = b$) entre $\pi / 2$ e π e um ponto de mínimo (denotado aqui por $x = a$) entre $-\pi$ e $-\pi / 2$.
6	Intervalos de crescimento	Temos infinitos. Especificamente em $[-\pi, \pi]$ podemos visualizar. (a, b) .
	Intervalos de decrescimento	Temos infinitos. Especificamente em $[-\pi, \pi]$ podemos ter $(-\pi, a)$ e (b, π) .
7	Concavidade	Especificamente em $[-\pi, \pi]$ temos: côncava para baixo em $(0, \pi)$ e côncava para cima em $(-\pi, 0)$.
	Pontos de inflexão	Temos infinitos pontos. Especificamente no intervalo $[-\pi, \pi]$ temos $x = 0$.
8	Assíntotas verticais	não tem.
	Assíntotas horizontais	não tem.

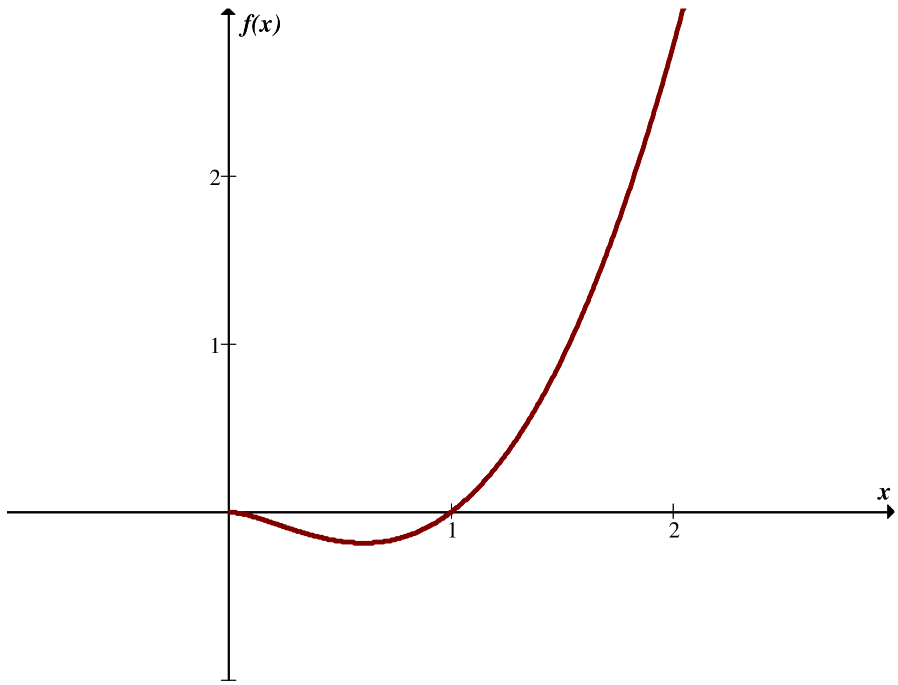
(i) $f(x) = x\sqrt{4 - x^2}$



Etapa	**Procedimento**	**Resultado da análise visual**
1	Construção do gráfico	Gráfico representado acima desta tabela
2	Domínio da função	$[-2,2]$
3	Conjunto Imagem	$[-2,2]$
4	Raízes reais	$x=-2,\ x=0\ e\ x=2$.
5	Pontos críticos e extremos	Observa-se um ponto de máximo (denotado aqui por $x=a$) entre 0 e 2 e um ponto de mínimo (denotado aqui por $x=b$) entre -2 e 0.
6	Intervalos de crescimento	(a,b)
	Intervalos de decrescimento	$(-2,a)$ e $(b,2)$
7	Concavidade	côncava para baixo em $(0,2)$ e côncava para cima em $(-2,0)$.
	Pontos de inflexão	$x=0$.
8	Assíntotas verticais	não tem.

	Assíntotas horizontais	não tem.

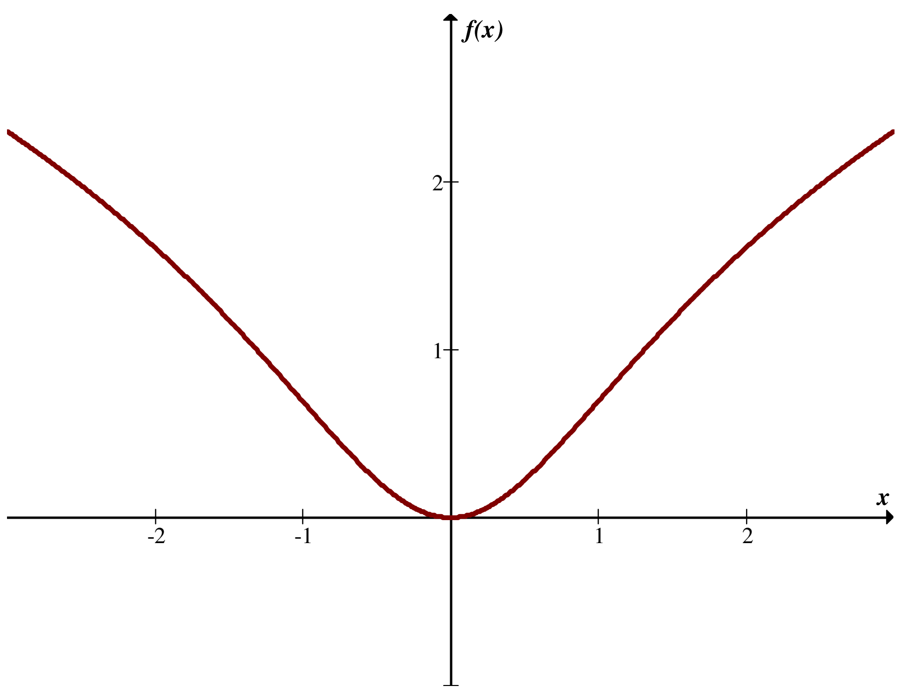
(j) $f(x) = x^2 \ln x$



Etapa	Procedimento	Resultado da análise visual
1	Construção do gráfico	Gráfico representado acima desta tabela
2	Domínio da função	$(0,+\infty)$
3	Conjunto Imagem	$[-a,+\infty]$. O valor de a não está bem visualizado graficamente, mas pode ser encontrado analiticamente.
4	Raízes reais	$x = 1$.
5	Pontos críticos e extremos	é possível visualizar um ponto de mínimo (denotado aqui de $x = b$) nas proximidades de 0,5. Observamos que este ponto pode ser encontrado algebricamente.

6	Intervalos de crescimento	$(b,+\infty)$
	Intervalos de decrescimento	$(0,b)$
7	Concavidade	É possível visualizar um intervalo em que a concavidade é para cima, mas nas proximidades do zero parece ter uma mudança de concavidade que deve ser investigada algebricamente.
	Pontos de inflexão	Tem-se a necessidade de uma investigação algébrica nas proximidades do zero.
8	Assíntotas verticais	não tem.
	Assíntotas horizontais	não tem.

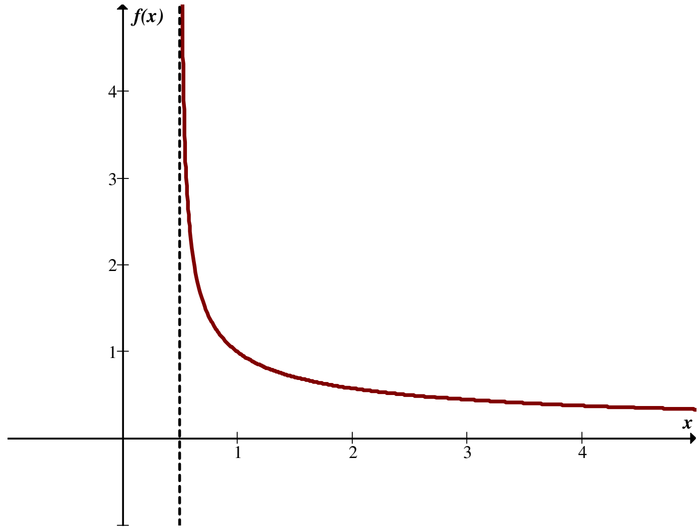
(k) $y = \ln(x^2 + 1)$.



Etapa	Procedimento	Resultado da análise visual
1	Construção do gráfico	Gráfico representado acima desta tabela

2	Domínio da função	Conjunto dos Números Reais.
3	Conjunto Imagem	$[0,+\infty)$
4	Raízes reais	$x = 0$.
5	Pontos críticos e extremos	Ponto de mínimo em $x = 0$.
6	Intervalos de crescimento	$(0,+\infty)$
	Intervalos de decrescimento	$(-\infty,0)$
7	Concavidade	É possível visualizar um intervalo em que a concavidade é para cima em $(-1,1)$ e nos demais pontos do domínio tem a concavidade para baixo.
	Pontos de inflexão	Tem-se a necessidade de uma investigação algébrica nas proximidades do -1 e 1 para confirmar a visualização da concavidade.
8	Assíntotas verticais	não tem.
	Assíntotas horizontais	não tem.

(l) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2x-1}}$



Etapa	Procedimento	Resultado da análise visual
1	Construção do gráfico	Gráfico representado acima desta tabela
2	Domínio da função	$(1/2,+\infty)$
3	Conjunto Imagem	$(0,+\infty)$
4	Raízes reais	não tem
5	Pontos críticos e extremos	não tem
6	Intervalos de crescimento	não tem
	Intervalos de decrescimento	$(1/2,+\infty)$
7	Concavidade	côncava para cima em seu domínio.
	Pontos de inflexão	não tem.
8	Assíntotas verticais	$x = 1/2$
	Assíntotas horizontais	$y = 0$.