

5.12 – EXERCÍCIO – pg. 224

1. Um fio de comprimento l é cortado em dois pedaços. Com um deles se fará um círculo e com o outro um quadrado.

a) Como devemos cortar o fio a fim de que a soma das duas áreas compreendidas pelas figuras seja mínima?

$S = \pi r^2 + a^2$ sendo r o raio do círculo e a o lado do quadrado.

$$\text{temos que } 2\pi r + 4a = l \quad \Rightarrow \quad a = \frac{l - 2\pi r}{4}.$$

Assim,

$$S = \pi r^2 + \left(\frac{l - 2\pi r}{4}\right)^2$$

$$S = \pi r^2 + \frac{l^2 - 4l\pi r + 4\pi^2 r^2}{16}$$

$$S' = 2\pi r + \frac{-4l\pi + 4\pi^2 \cdot 2r}{16}$$

$$2\pi r + \frac{-4l\pi + 8\pi^2 r}{16} = 0$$

$$32\pi r - 4l\pi + 8\pi^2 r = 0$$

$$r(32\pi + 8\pi^2) = 4l\pi$$

$$r = \frac{4l\pi}{32\pi + 8\pi^2} = \frac{l}{8 + 2\pi}$$

$$S'' = 2\pi + \frac{8\pi^2}{16}$$

$$S''\left(\frac{l}{8 + 2\pi}\right) = 2\pi + \frac{8\pi^2}{16} > 0 \quad \Rightarrow \quad \text{é ponto de mínimo}$$

$$\text{Portanto: } r = \frac{l}{8 + 2\pi} \text{ e } a = \frac{l}{4 + \pi}.$$

$$1^\circ \text{ Pedaço: } 4a = \frac{4l}{4 + \pi}$$

$$2^\circ \text{ Peçaço: } 2\pi r = \frac{l\pi}{4 + \pi}$$

b) Como devemos cortar o fio a fim de que a soma das áreas compreendidas seja máxima?

Como não existe ponto de máximo na função devemos fazer somente um círculo ou um quadrado. Temos:

$$A_{\text{círculo}} = \pi r^2 = \pi \frac{l^2}{2\pi} = \frac{l^2}{2}$$

$$A_{\text{quadrado}} = \frac{l^2}{16}$$

$$\Rightarrow A_{\text{círculo}} > A_{\text{quadrado}}$$

Portanto, vamos usar o comprimento do fio para fazer somente um círculo de raio $r = \frac{l}{2\pi}$.

2. Determinar o ponto P situado sobre o gráfico da hipérbole $xy = 1$, que está mais próximo da origem.

Vamos considerar um ponto $P(x, y)$ sobre a hipérbole e a distância d deste ponto até a origem. Temos:

$$d = \sqrt{x^2 + y^2} \text{ mas } y = \frac{1}{x}$$

$$d = \sqrt{x^2 + \frac{1}{x^2}} = \sqrt{\frac{x^4 + 1}{x^2}}$$

Para achar o mínimo de d podemos minimizar a função

$$f = \frac{x^4 + 1}{x^2}$$

$$f' = \frac{2x^4 - 2}{x^3}$$

$$f' = 0 \Rightarrow \frac{2x^4 - 2}{x^3} = 0$$

$$2x^4 - 2 = 0 \Rightarrow x = \pm 1 \text{ é ponto crítico}$$

$$f'' = \frac{2x^4 + 6}{x^4}$$

$$f''|_{\pm 1} > 0 \quad \Rightarrow \quad \pm 1 \text{ são pontos de mínimo}$$

$$f''|_{-1} > 0$$

Portanto $P(x, y) = P(1, 1)$ ou $P(-1, -1)$.

3. Um fazendeiro tem 200 bois, cada um pesando 300 kg. Até agora ele gastou R\$380.000,00 para criar os bois e continuará gastando R\$ 2,00 por dia para manter um boi. Os bois aumentam de peso a uma razão de 1,5 kg por dia. Seu preço de venda, hoje, é de R\$ 18,00 o quilo, mas o preço cai 5 centavos por dia. Quantos dias deveria o fazendeiro aguardar para maximizar seu lucro?

$$\text{Custo} = 380.000 + 400t$$

$$\text{Venda} : 200 (300 + 1,5t) \cdot (18,00 - 0,05t)$$

$$L = 200 (300 + 1,5t) \cdot (18,00 - 0,05t) - (380000 + 400t)$$

$$L = (60000 + 300t) \cdot (18 - 0,05t) - (380000 + 400t)$$

$$L' = (60000 + 300t) (-0,05) + (18 - 0,05t) \cdot 300 - 400$$

$$L' = -3000 - 15t + 5400 - 15t - 400$$

$$L' = 0 \quad \Rightarrow \quad -30t + 2000 = 0$$

$$-30t = -2000$$

$$t = \frac{2000}{30} \cong 67 \text{ dias}$$

$$L'' = -30 < 0 \quad \Rightarrow \quad \text{é ponto de máximo.}$$

Assim, temos que o fazendeiro deve esperar 67 dias para obter o lucro máximo.

4. Achar dois números positivos cuja soma seja 70 e cujo produto seja o maior possível.

$$x + y = 70$$

$$f = xy = x(70 - x) = 70x - x^2$$

$$f' = 70 - 2x$$

$$f' = 0 \Rightarrow 70 - 2x = 0 \Rightarrow x = 35$$

$$f'' = -2$$

$$f''|_{35} = -2 < 0 \Rightarrow x = 35 \text{ é ponto de máximo.}$$

Portanto $x = 35$ e $y = 35$.

5. Usando uma folha quadrada de cartolina, de lado a , deseja-se construir uma caixa sem tampa, cortando em seus cantos quadrados iguais e dobrando convenientemente a parte restante. Determinar o lado dos quadrados que devem ser cortados de modo que o volume da caixa seja o maior possível.

$$V = (a - 2x)^2 x = (a^2 - 4ax + 4x^2) x$$

$$V = a^2 x - 4ax^2 + 4x^3$$

$$V' = a^2 - 8ax + 12x^2$$

$$a^2 - 8ax + 12x^2 = 0$$

$$x = a/2 \text{ ou } x = a/6$$

$$V'' = -8a + 24x$$

$$V''(a/2) = -8a + 12a = 4a > 0 \Rightarrow a/2 \text{ é ponto de mínimo}$$

$$V''\left(\frac{a}{6}\right) = -8a + 24 \cdot \frac{a}{6} = -4a < 0 \Rightarrow a/6 \text{ é ponto de máximo.}$$

Portanto: os lados dos quadrados devem medir $\frac{a}{6}$ unidades de medida.

6. Determinar as dimensões de uma lata cilíndrica, com tampa, com volume V , de forma que a sua área total seja mínima.

$$A = 2\pi rh + 2\pi r^2$$

Temos que:

$$V = \pi r^2 h$$

$$h = \frac{V}{\pi r^2}$$

Assim,

$$A = 2\pi r \cdot \frac{V}{\pi r^2} + 2\pi r^2$$

$$A = \frac{2V}{r} + 2\pi r^2$$

$$A' = \frac{-2V}{r^2} + 4\pi r$$

$$A' = 0 \Rightarrow \frac{-2V + 4\pi r^3}{r^2} = 0$$

$$-2V + 4\pi r^3 = 0$$

$$4\pi r^3 = 2V \Rightarrow r^3 = \frac{2V}{4\pi} = \frac{V}{2\pi}$$

$$r = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$$

$$A'' = \frac{4V}{r^3} + 4\pi$$

$$A''\left(\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}\right) = \frac{4V}{\frac{V}{2\pi}} + 4\pi = \frac{4V}{1} \cdot \frac{2\pi}{V} + 4\pi$$

$$= 8\pi + 4\pi = 12\pi > 0$$

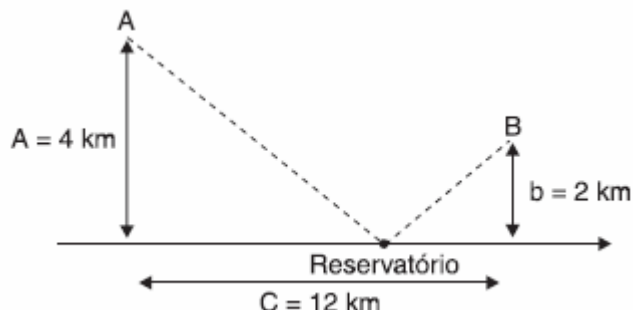
$$\Rightarrow r = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}} \text{ é ponto de mínimo}$$

Portanto,

$$r = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$$

$$h = \frac{V}{\pi r^2} = \frac{V}{\pi \cdot \sqrt[3]{\frac{V^2}{4\pi^2}}} = \sqrt[3]{\frac{4V}{\pi}}$$

7. Duas indústrias A e B necessitam de água potável. A figura a seguir esquematiza a posição das indústrias, bem como a posição de um encanamento retilíneo l , já existente. Em que ponto do encanamento deve ser instalado um reservatório de modo que a metragem de cano a ser utilizada seja mínima?



$$\text{Encanamento } \overline{AR} = \sqrt{a^2 + (c-x)^2}$$

$$\text{Encanamento } \overline{BR} = \sqrt{b^2 + x^2}$$

$$L(x) = \sqrt{a^2 + (c-x)^2} + \sqrt{b^2 + x^2}$$

$$L(x) = \sqrt{16 + (12-x)^2} + \sqrt{4 + x^2}$$

$$\begin{aligned} L'(x) &= \frac{1}{2} \frac{2(12-x)(-1)}{\sqrt{16 + (12-x)^2}} + \frac{2x}{2\sqrt{4 + x^2}} \\ &= \frac{x-12}{\sqrt{16 + (12-x)^2}} + \frac{x}{\sqrt{4 + x^2}} \end{aligned}$$

$$L' = 0 \Rightarrow \frac{x-12}{\sqrt{16 + (12-x)^2}} + \frac{x}{\sqrt{4 + x^2}} = 0$$

$$(x-12)\sqrt{4 + x^2} + x\sqrt{16 + (12-x)^2} = 0$$

$$(x-12)^2(4 + x^2) = x^2(16 + (12-x)^2)$$

$$(x^2 - 24x + 144)(4 + x^2) = x^2(16 + 144 - 24x + x^2)$$

$$12x^2 + 96x - 576 = 0$$

$$x^2 + 8x - 48 = 0$$

$$x_1 = 4 \quad x_2 = -12 \text{ não interessa.}$$

$$L''(x) = \frac{16}{(x^2 - 24x + 160)^{3/2}} + \frac{4}{(x^2 + 4)^{3/2}}$$

$$L''(4) = \frac{3\sqrt{5}}{100} > 0 \Rightarrow x = 4 \text{ é ponto de mínimo}$$

Precisamos ainda analisar os extremos pois $0 \leq x \leq 12$.

$$L(0) = 12,64 + 2 = 14,64$$

$$L(12) = 4 + 12,16 = 16,16$$

$$L(4) = 8,94 + 4,47 = 13,41$$

Portanto, $x = 4$ é o ponto de mínimo procurado.

8. O custo e a receita total com a produção e comercialização de um produto são dados por:

$$C(q) = 600 + 2,2q$$

$$R(q) = 10q - 0,006q^2$$

sendo $0 \leq q \leq 900$.

(a) Encontrar a quantidade q que maximiza o lucro com a venda desse produto.

$$L(q) = R(q) - C(q)$$

$$= 10q - 0,006q^2 - 600 - 2,2q$$

$$= -0,006q^2 + 7,8q - 600$$

$$L'(q) = -0,012q + 7,8 = 0$$

$$0,012q = 7,8$$

$$q = 650$$

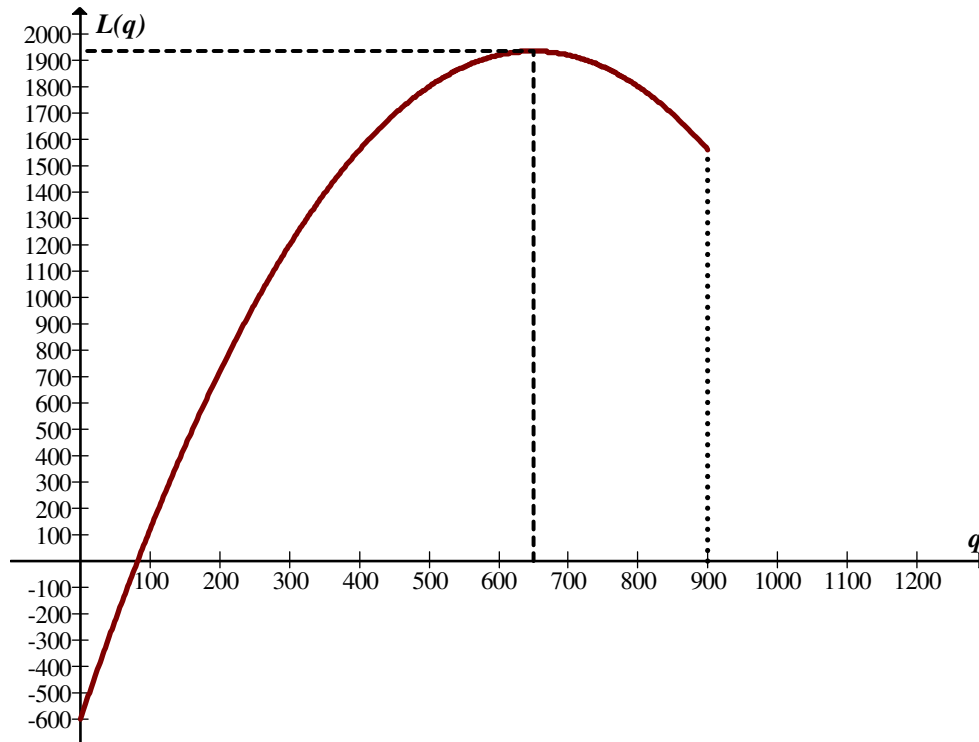
$$L''(q) = -0,012 < 0$$

Assim $q = 650$ é ponto de máximo.

(b) Qual o nível de produção que minimiza o lucro?

A figura a seguir apresenta o gráfico da função lucro $L(q) = -0,006q^2 + 7,8q - 600$.

Temos que o lucro mínimo é igual a zero e ocorre no nível de produção $q \cong 82$.



(c) Qual o nível de produção correspondente ao prejuízo máximo?

Observando novamente a figura podemos observar que o prejuízo é de 600 para $q=0$.

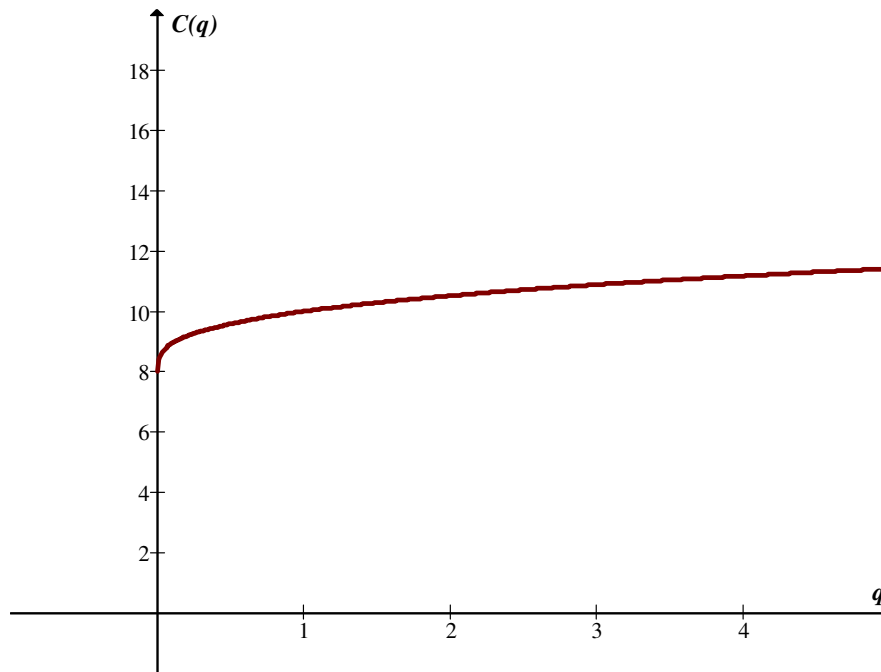
9. O gráfico da função $C(q) = Kq^{1/\alpha} + F$, $q \in [q_0, q_1]$, sendo K , α e F constantes positivas, é denominado de curvas de custos a curto prazo de Cobb – Douglas. Essa curva é bastante utilizada para representar os custos de uma empresa com a produção de um produto.

(a) Dar o significado da constante F .

Temos que F representa o custo fixo.

(b) Verificar que, quando $\alpha > 1$, a curva é côncava para baixo e interpretar esse resultado sobre o ponto de vista da Economia.

Na figura a seguir apresentamos um exemplo para $K = 2$, $\alpha = 3$ e $F = 8$.



Algebricamente podemos fazer:

$$C'(q) = k \cdot \frac{1}{\alpha} q^{\frac{1}{\alpha}-1}$$

$$C''(q) = k \cdot \frac{1}{\alpha} \left(\frac{1}{\alpha} - 1 \right) q^{\frac{1}{\alpha}-2}$$

$$\alpha > 1 \Rightarrow \frac{1}{\alpha} > 0 \text{ e } \left(\frac{1}{\alpha} - 1 \right) < 0$$

$$q^{\frac{1}{\alpha}-2} > 0$$

Portanto, $C''(q) < 0 \Rightarrow C(q)$ é côncava para baixo.

Sob o ponto de vista da economia isso significa que o custo marginal decresce a medida que o nível de produção aumenta.

- (c) Supor $K = 2$, $\alpha = 3$ e $F = 8$ e determinar se existir, o valor de q que fornece o custo médio mínimo.

$$C(q) = 2q^{1/3} + 8$$

$$\bar{C}(q) = \frac{2q^{1/3} + 8}{q}$$

$$\bar{C}(q) = 2q^{-2/3} + 8q^{-1}$$

$$C'(q) = 2 \cdot \frac{-2}{3} \cdot q^{-5/3} - 8q^{-2} = -\frac{4}{3} \frac{1}{q^{5/3}} - \frac{8}{q^2} = \frac{1}{q^2} \left[-\frac{4}{3} q^{1/3} - 8 \right] = 0$$

$$-\frac{4}{3} q^{1/3} = 8$$

$$q^{1/3} = -\frac{8 \cdot 3}{4} = -6$$

$$q = (-6)^3$$

Como $q < 0$ não há q que produz custo médio mínimo.

(d) Usando os mesmos valores de item (c), determinar o nível de produção que minimiza o custo marginal, no intervalo $125 \leq q \leq 125000$.

$C'(q) = \frac{2}{3} q^{-2/3}$ é o custo marginal, que vamos denotar CM.

$$CM'(q) = \frac{2}{3} \cdot -\frac{2}{3} q^{-5/3} = 0 \quad \#$$

$$CM(125000) = 0,000266$$

Como $CM(q)$ é decrescente, $q = 125000$.

10. Qual é o retângulo de perímetro máximo inscrito no círculo de raio 12 cm?

Supondo que o retângulo tenha lados x e y e o círculo raio $r=12$ temos:

$$\text{Perímetro} = 2x + 2y$$

Observando o triângulo retângulo de hipotenusa igual ao diâmetro e catetos x e y temos:

$$24^2 = x^2 + y^2$$

$$y^2 = 576 - x^2$$

$$y = \sqrt{576 - x^2}$$

Substituindo esse valor na expressão do perímetro temos:

$$P = 2x + 2\sqrt{576 - x^2}$$

$$P' = 2 + \frac{2 \cdot (-1) \cdot 2x}{2\sqrt{576 - x^2}} = \frac{2\sqrt{576 - x^2} - 2x}{\sqrt{576 - x^2}}$$

$$P' = 0 \Rightarrow 2\sqrt{576 - x^2} - 2x = 0$$

$$2\sqrt{576 - x^2} = 2x$$

$$576 - x^2 = x^2$$

$$2x^2 = 576$$

$$x^2 = 288 \quad \therefore \quad x = \pm\sqrt{288} \cong 16,97$$

$$P'' = -\frac{-2\sqrt{576 - x^2} + 2x \cdot \frac{-2x}{2\sqrt{576 - x^2}}}{576 - x^2} = \frac{-1152}{(576 - x^2)^{3/2}}$$

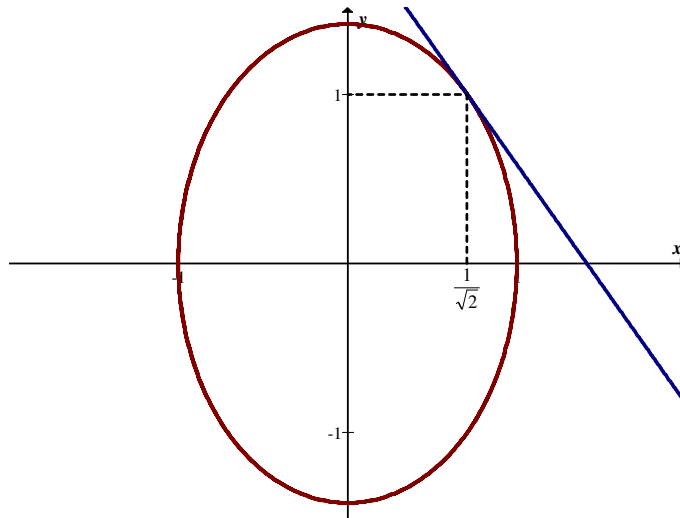
$$P''|_{16,97} \cong -0,236 < 0$$

$\therefore \sqrt{288} \cong 16,97$ é ponto de máximo

\implies O retângulo de perímetro máximo é o quadrado de lado $\sqrt{288}$.

11. Traçar uma tangente à elipse $2x^2 + y^2 = 2$ de modo que a área do triângulo que ela forma com os eixos coordenados positivos seja mínima. Obter as coordenadas do ponto de tangência e a área mínima.

Na figura que segue temos a visualização do problema.



Seja (x_1, y_1) o ponto de tangência.

A equação da tangente é dada por:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

Vamos encontrar os valores de x e y onde a reta tangente corta os eixos.

$$\text{Se } x = 0 \Rightarrow y - y_1 = -m x_1 \quad \therefore \quad y = y_1 - m x_1$$

$$\text{Se } y = 0 \Rightarrow -y_1 = m(x - x_1) \quad \therefore \quad -\frac{y_1}{m} = x - x_1$$

$$x = x_1 - \frac{y_1}{m}$$

Área do triângulo:

$$A = \frac{\left(x_1 - \frac{y_1}{m}\right)(y_1 - m x_1)}{2} \text{ que é a função que queremos minimizar.}$$

Sabemos ainda que:

$$2x^2 + y^2 = 2$$

$$4x + 2yy' = 0$$

$$2yy' = -4x$$

$$y' = \frac{-4x}{2y} = -\frac{2x}{y}$$

$$m(x_1) = \frac{-2x_1}{y_1}$$

Substituindo em A vem:

$$\begin{aligned}
 A &= \frac{1}{2} \left(x_1 - \frac{y_1}{m} \right) (y_1 - mx_1) \\
 &= \frac{1}{2} \left(x_1 - \frac{y_1}{\frac{-2x_1}{y_1}} \right) \left(y_1 - \frac{-2x_1}{y_1} x_1 \right) \\
 &= \frac{1}{2} \left(x_1 + \frac{y_1^2}{2x_1} \right) \left(y_1 + \frac{2x_1^2}{y_1} \right) \\
 &= \frac{1}{2} \left(\frac{2x_1^2 + y_1^2}{2x_1} \right) \left(\frac{y_1^2 + 2x_1^2}{y_1} \right) \\
 &= \frac{1}{2} \frac{(2x_1^2 + y_1^2)^2}{2x_1 y_1} = \frac{(2x_1^2 + y_1^2)^2}{4x_1 y_1}
 \end{aligned}$$

Ainda temos que:

$$2x_1^2 + y_1^2 = 2$$

$$y_1^2 = 2 - 2x_1^2$$

$$y_1 = \sqrt{2 - 2x_1^2}$$

Então:

$$\begin{aligned}
 A &= \frac{4}{4x_1 \sqrt{2 - 2x_1^2}} = \frac{1}{x_1 \sqrt{2 - 2x_1^2}} \\
 A' &= \frac{x_1 \sqrt{2 - 2x_1^2} \cdot 0 - 1 \left(x_1 \frac{-4x_1}{2\sqrt{2 - 2x_1^2}} + \sqrt{2 - 2x_1^2} \right)}{\left(x_1 \sqrt{2 - 2x_1^2} \right)^2} = \frac{\frac{2x_1^2}{\sqrt{2 - 2x_1^2}} - \sqrt{2 - 2x_1^2}}{x_1^2 (2 - 2x_1^2)}
 \end{aligned}$$

$$A' = 0 \Rightarrow \frac{2x_1^2}{\sqrt{2 - 2x_1^2}} - \sqrt{2 - 2x_1^2} = 0$$

$$2x_1^2 - (2 - 2x_1^2) = 0$$

$$4x_1^2 - 2 = 0$$

$$x_1^2 = \frac{1}{2} \quad \therefore \quad x_1 = \pm \sqrt{\frac{1}{2}} = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Como $A' < 0$ em $\left[-\frac{1}{\sqrt{2}}, +\frac{1}{\sqrt{2}}\right]$ e $A' > 0$ em $\left(-1, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \cup \left[\frac{1}{\sqrt{2}}, +1\right)$,

temos que:

$x_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}$ é ponto de mínimo

$$\begin{aligned} \Rightarrow y_1 &= \sqrt{2 - 2x_1^2} \\ &= \sqrt{2 - 2 \cdot \frac{1}{2}} = \pm 1 \end{aligned}$$

Assim as coordenadas do ponto de tangência são $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 1\right)$ e a área mínima:

$$A(x_1, y_1) = \frac{(2x_1^2 + y_1^2)^2}{4x_1y_1} = \frac{\left(2 \cdot \frac{1}{2} + 1\right)^2}{4 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot 1} = \frac{4}{4 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot 1} = \sqrt{2}.$$

Finalmente temos a equação da tangente no ponto encontrado:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - 1 = \frac{-2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}}{1} \left(x - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

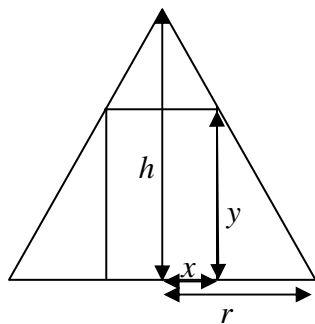
$$y - 1 = -\sqrt{2} \left(x - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$y - 1 = -\sqrt{2}x + 1$$

$$y + \sqrt{2}x - 2 = 0$$

12. Mostrar que o volume do maior cilindro reto que pode ser inscrito num cone reto é $\frac{4}{9}$ do volume do cone.

A figura que segue mostra um corte vertical do cilindro inscrito no cone.



Temos:

$$\frac{y}{r-x} = \frac{h}{r}$$

$$y = \frac{h(r-x)}{r}$$

$$V_{\text{cilindro}} = \pi x^2 y$$

$$V = \pi x^2 \frac{h(r-x)}{r} = \frac{\pi r h x^2 - \pi h x^3}{r}$$

$$V' = \frac{2\pi r h x - 3\pi h x^2}{r}$$

$$V' = 0 \Rightarrow 2\pi r h x - 3\pi h x^2 = 0$$

$$x(2\pi r h - 3\pi h x) = 0$$

$$x_1 = 0 \quad e \quad x_2 = \frac{2r}{3}$$

$$V'' = \frac{2\pi r h - 6\pi h x}{r}$$

$$V''|_0 = \frac{2\pi r h}{r} > 0 \Rightarrow \text{ponto m\u00ednimo}$$

$$V''|_{\frac{2r}{3}} = \frac{2\pi r h - 6\pi h \frac{2r}{3}}{r} = \frac{-2\pi r h}{r} < 0 \Rightarrow \text{\u00e9 ponto de m\u00e1ximo}$$

Portanto, o raio do cilindro \u00e9 igual a $\frac{2}{3}r$, onde r \u00e9 o raio da base do cone.

$$\text{A altura do cilindro } y = \frac{h\left(r - \frac{2r}{3}\right)}{r} = \frac{h}{3}.$$

Assim,

$$V_{\text{cilindro}} = \pi x^2 y = \frac{4\pi r^2 h}{27} = \frac{4}{9} \left(\frac{\pi r^2 h}{3} \right) = \frac{4}{9} (V_{\text{cone}}).$$

13. Um cone reto é cortado por um plano paralelo à sua base. A que distância da base deve ser feito esse corte, para que o cone reto de base na secção determinada, e de vértice no centro da base do cone dado, tenha volume máximo?

Considerando r o raio da base do cone; h a altura do cone dado; x o raio da secção e y a altura da secção até a base do cone dado, temos:

$$\frac{h}{r} = \frac{y}{r-x}$$

$$y = \frac{h(r-x)}{r}$$

$$V(x) = \frac{\pi x^2 y}{3} = \frac{\pi x^2 \frac{h(r-x)}{r}}{3} = \frac{\pi r h x^2 - \pi h x^3}{3r}$$

$$V'(x) = \frac{2\pi r h x - 3\pi h x^2}{3r}$$

$$V' = 0 \Rightarrow 2\pi r h x - 3\pi h x^2 = 0$$

$$x_1 = 0 \quad e \quad x = \frac{2r}{3}$$

$$V''(x) = \frac{2\pi r h - 6\pi h x}{3r}$$

$$V''\left(\frac{2r}{3}\right) = \frac{2\pi r h - 4\pi r h}{3r} = \frac{-2\pi h}{3} < 0$$

Portanto, $x = \frac{2r}{3}$ é ponto de máximo.

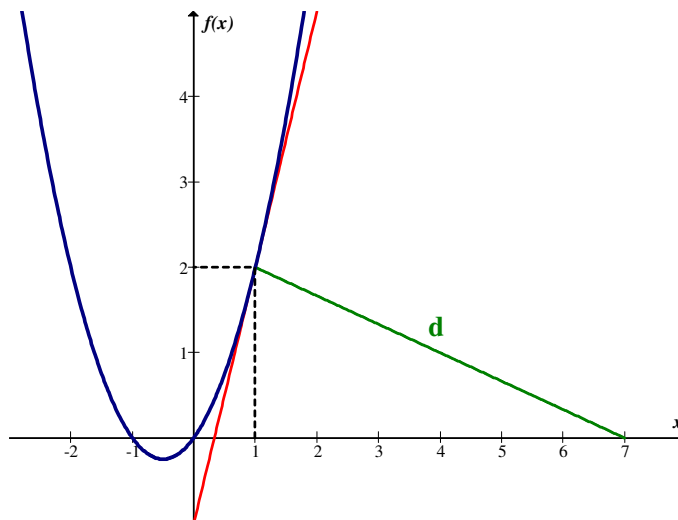
$$y = h - \frac{hx}{r}$$

$$y = h - \frac{h}{r} \cdot \frac{2r}{3} = \frac{3h - 2h}{3} = \frac{h}{3}.$$

Portanto, a distância deve ser igual à terça parte da altura do cone reto dado.

14. Determinar o ponto A da curva $y = x^2 + x$ que se encontra mais próximo de $(7, 0)$.
Mostrar que a reta que passa por $(7,0)$ e por A é normal à curva dada em A .

A figura que segue ilustra este problema.



Temos:

$$d = \sqrt{(x-7)^2 + y^2} = \sqrt{(x-7)^2 + (x^2 + x)^2}.$$

Basta minimizar a função

$$f = (x-7)^2 + (x^2 + x)^2$$

$$f = x^2 - 14x + 49 + x^4 + 2x^3 + x^2$$

$$f = x^4 + 2x^3 + 2x^2 - 14x + 49$$

$$f' = 4x^3 + 6x^2 + 4x - 14$$

$$f' = 0 \Rightarrow 4x^3 + 6x^2 + 4x - 14 = 0$$

$$2x^3 + 3x^2 + 2x - 7 = 0$$

$$x_1 = 1 \quad x_2 \text{ e } x_3 \text{ são complexas}$$

$$f'' = 12x^2 + 12x + 4$$

$$f''|_{x=1} > 0 \Rightarrow x_1 = 1 \text{ é ponto de mínimo.}$$

Reta \overline{AP} que passa por :

$$A(1,2)$$

$$P(7,0)$$

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$$

$$\frac{y - 2}{0 - 2} = \frac{x - 1}{7 - 1}$$

$$\frac{y - 2}{-2} = \frac{x - 1}{6}$$

$$6y - 12 = -2x + 2$$

$$6y = -2x + 14$$

$$y = -\frac{1}{3}x + \frac{7}{3}$$

que é a equação da reta que passa por \overline{AP} .

Equação da reta tangente:

$$y = x^2 + x$$

$$y' = 2x + 1$$

$$y'|_1 = 2 + 1 = 3$$

$$y - 2 = 3(x - 1)$$

$$y - 2 = 3x - 3$$

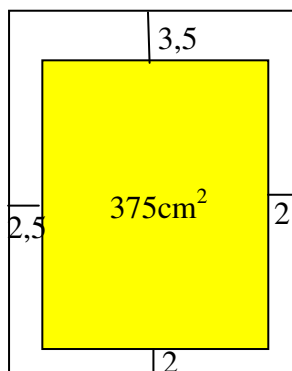
$$y = 3x - 1$$

As duas retas são perpendiculares, pois as declividades multiplicadas resultam -1 .

$$3 \frac{-1}{3} = -1.$$

15. Uma folha de papel contém 375 cm^2 de matéria impressa, com margem superior de $3,5$ cm, margem inferior de 2 cm, margem lateral direita de 2 cm e margem lateral esquerda de $2,5$ cm. Determinar quais devem ser as dimensões da folha para que haja o máximo de economia de papel.

A Figura que segue ilustra o problema.



Temos:

$$a \cdot b = 375 \Rightarrow b = \frac{375}{a}$$

$$x = a + 2,5 + 2 = a + 4,5$$

$$y = b + 3,5 + 2 = b + 5,5$$

$A = xy$ deve ser mínima.

$$A = (a + 4,5)(b + 5,5)$$

$$A = (a + 4,5) \left(\frac{375}{a} + 5,5 \right)$$

$$A = 375 + 5,5a + \frac{1687,5}{a} + 24,75$$

$$A = 5,5a + \frac{1687,5}{a} + 399,75$$

$$A' = 5,5 - \frac{1687,5}{a^2}$$

$$A' = 0 \Rightarrow 5,5 - \frac{1687,5}{a^2} = 0$$

$$5,5a^2 - 1687,5 = 0$$

$$5,5a^2 = 1687,5 \quad \therefore \quad a^2 = \frac{1687,5}{5,5} \cong 306,82 \quad a \cong \pm 17,51$$

$$A'' = \frac{1687,5 \cdot 2}{a^3} = \frac{3375}{a^3}$$

$$A''|_{17,51} > 0 \Rightarrow a \cong 17,51 \text{ é ponto de mínimo}$$

Portanto,

$$a \cong 17,51$$

e

$$b \cong 21,41$$

$$\text{Assim, } x = a + 4,5 = 17,51 + 4,5 \cong 22,01$$

$$y = b + 5,5 = 21,41 + 5,5 \cong 26,91.$$

16. Uma janela tem a forma de um retângulo encimado por um semicírculo. Achar as dimensões de modo que o perímetro seja 3,2 m e a área a maior possível.

Considerando o retângulo com dimensões h e $2r$ sendo r o raio do semicírculo, temos:

$$\text{Perímetro} = \pi r + 2r + 2h = 3,2 \text{ m}$$

$$\text{Área} = \frac{\pi r^2}{2} + 2rh$$

$$\text{Vale a relação: } 2h = 3,2 - \pi r - 2r$$

$$h = \frac{3,2 - \pi r - 2r}{2}$$

$$A = \frac{\pi r^2}{2} + 2r \frac{3,2 - \pi r - 2r}{2}$$

$$A = \frac{\pi r^2 + 6,4r - 2\pi r^2 - 4r^2}{2} = \frac{6,4r - 4r^2 - \pi r^2}{2}$$

$$A' = \frac{6,4 - 8r - 2\pi r}{2}$$

$$A' = 0 \Rightarrow \frac{6,4 - 8r - 2\pi r}{2} = 0$$

$$6,4 - 8r - 2\pi r = 0$$

$$8r + 2\pi r = 6,4$$

$$r(8 + 2\pi) = 6,4$$

$$r = \frac{6,4}{8 + 2\pi} = \frac{3,2}{4 + \pi}$$

$$A'' = \frac{-8 - 2\pi}{2} = -4 - \pi$$

$$A'' \Big|_{\frac{3,2}{4+\pi}} = -4 - \pi < 0 \Rightarrow \frac{3,2}{4 + \pi} \text{ é ponto de máximo.}$$

Agora temos que:

$$h = \frac{3,2 - \pi r - 2r}{2} = \frac{1}{2} \left(3,2 - \pi \frac{3,2}{4 + \pi} - 2 \frac{3,2}{4 + \pi} \right)$$

$$h = \frac{1}{2} \left(3,2 - \frac{3,2\pi + 6,4}{4 + \pi} \right)$$

$$h = \frac{1}{2} \frac{12,8 + 3,2\pi - 3,2\pi + 6,4}{4 + \pi}$$

$$h = \frac{1}{2} \frac{6,4}{4 + \pi} = \frac{6,4}{8 + 2\pi} = \frac{3,2}{4 + \pi} \cong 0,44$$

$$r = \frac{3,2}{4 + \pi} \text{ é o raio do semi-círculo}$$

$$2r = \frac{6,4}{4 + \pi} \cong 0,88$$

Portanto, as dimensões do retângulo são 0.44 m x 0.88 m.

17. Um canhão, situado no solo, é posto sob um ângulo de inclinação α . Seja l o alcance do canhão, dado por $l = \frac{2v^2}{g} \text{sen} \alpha \cos \alpha$, onde v e g são constantes. Para que ângulo o

alcance é máximo?

Temos:

$$l = \frac{2v^2}{g} \text{sen} \alpha \cos \alpha$$

$$l' = \frac{2v^2}{g} (-\text{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha)$$

$$l' = 0 \Rightarrow \frac{2v^2}{g} (-\text{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha) = 0$$

$$-\text{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 0$$

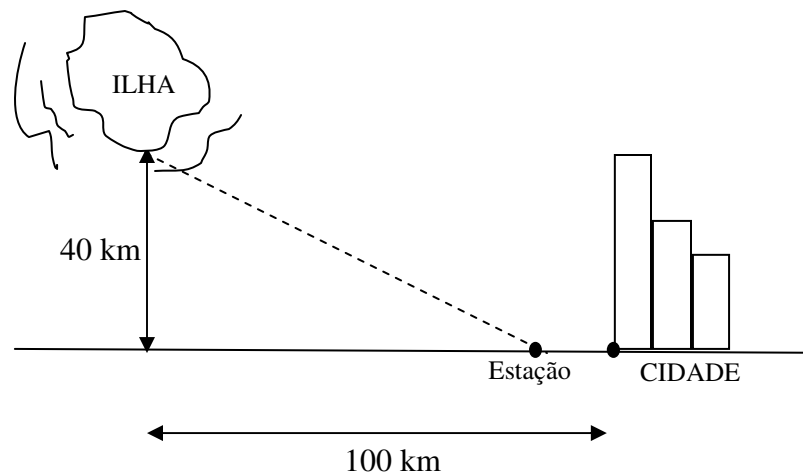
$$\text{sen} \alpha = \cos \alpha, 0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$$

$$\alpha = \frac{\pi}{4}$$

$$l'' = \frac{2v^2}{g} (-4\operatorname{sen} \alpha \cos \alpha)$$

$$l'' \Big|_{\frac{\pi}{4}} = \frac{-4v^2}{g} < 0 \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{4} \text{ é ponto de máximo.}$$

18. Uma agência de turismo está organizando um serviço de barcas, de uma ilha situada a 40 km de uma costa quase reta, para uma cidade que dista 100 km, como mostra a figura a seguir. Se a barca tem uma velocidade de 18 km por hora, e os carros têm uma velocidade média de 50 km/h, onde deverá estar situada a estação das barcas a fim de tornar a viagem a mais rápida possível?



Temos a função:

$$t = \frac{\sqrt{40^2 + (100 - x)^2}}{18} + \frac{x}{50}$$

$$t' = \frac{-2(100 - x)}{2\sqrt{40^2 + (100 - x)^2}} \cdot \frac{1}{18} + \frac{1}{50}$$

$$t' = 0 \Rightarrow \frac{-(100 - x)}{18\sqrt{40^2 + (100 - x)^2}} + \frac{1}{50} = 0$$

$$-50(100 - x) + 18\sqrt{40^2 + (100 - x)^2} = 0$$

$$-25(100 - x) + 9\sqrt{40^2 + (100 - x)^2} = 0$$

$$x_1 = 115,43$$

$$x_2 = 84,56$$

$$\begin{aligned}
9\sqrt{40^2 + (100-x)^2} &= 25(100-x) \\
81(40^2 + (100-x)^2) &= 625(100-x)^2 \\
81(11600 - 200x + x^2) &= 625(10000 - 200x + x^2) \\
939600 - 16200x + 81x^2 &= 6250000 - 125000x + 625x^2 \\
544x^2 - 108800x + 5310400 &= 0 \\
34x^2 - 6800x + 331900 &= 0 \\
17x^2 - 3400x + 165950 &= 0
\end{aligned}$$

$$t'' = \frac{1}{18} \cdot \frac{\sqrt{40^2 + (100-x)^2} + (100-x) \cdot \frac{-2(100-x)}{2\sqrt{40^2 + (100-x)^2}}}{40^2 + (100-x)^2}$$

$$t'' = \frac{1}{18} \cdot \frac{\sqrt{40^2 + (100-x)^2} - \frac{(100-x)^2}{\sqrt{40^2 + (100-x)^2}}}{40^2 + (100-x)^2}$$

$$t'' = \frac{1}{18} \cdot \frac{40^2 + (100-x)^2 - (100-x)^2}{\sqrt{40^2 + (100-x)^2} \cdot 40^2 + (100-x)^2}$$

$$t'' = \frac{1}{18} \cdot \frac{40^2}{[40^2 + (100-x)^2] \sqrt{40^2 + (100-x)^2}}$$

$$t''|_{84,56} > 0 \Rightarrow x = 84,56 \text{ é ponto de mínimo.}$$

$$\begin{aligned}
t(84,56) &= \frac{\sqrt{40^2 + (100-84,56)^2}}{18} + \frac{84,56}{50} \\
&= \frac{\sqrt{1600 + 238,3936}}{18} + 1,6912 \\
&\cong \frac{42,87}{18} + 1,6912 \\
&\cong 2,38 + 1,6912 \\
&\cong 4,07 \text{ horas.}
\end{aligned}$$

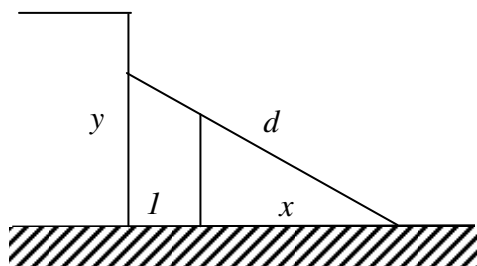
$$t(0) = \frac{\sqrt{1600 + 10000}}{18} + 0 = 5,98$$

$$t(100) = \frac{\sqrt{1600 + 0}}{18} + \frac{100}{50} = 2,22 + 2 = 4,22$$

Portanto para $0 \leq x \leq 100$ o mínimo absoluto é em $x \cong 84,56$ km.

19. Uma cerca de 1 m de altura está situada a uma distância de 1 m da parede lateral de um galpão. Qual o comprimento da menor escada cujas extremidades se apóiam na parede e no chão do lado de fora da cerca?

A Figura que segue ilustra o problema.



Temos:

$$\frac{1}{y} = \frac{x}{1+x} \quad \therefore y = \frac{1(1+x)}{x}$$

$$d = \sqrt{y^2 + (1+x)^2}$$

$$d = \sqrt{\frac{(1+x)^2}{x^2} + (1+x)^2} \text{ função para ser minimizada.}$$

Podemos minimizar $f = d^2$

$$f = \frac{1 + 2x + x^2 + x^2(1 + 2x + x^2)}{x^2} = \frac{1 + 2x + x^2 + x^2 + 2x^3 + x^4}{x^2}$$

$$f' = \frac{x^2(4x^3 + 6x^2 + 4x + 2) - (x^4 + 2x^3 + 2x^2 + 2x + 1) 2x}{x^4}$$

$$f' = 0 \Rightarrow 4x^4 + 6x^3 + 4x^2 + 2x - 2x^4 - 4x^3 - 4x^2 - 4x - 2 = 0$$

$$2x^4 + 2x^3 - 2x - 2 = 0$$

$$x^4 + x^3 - x - 1 = 0$$

$$x = 1$$

$$f' = \frac{2x^4 + 2x^3 - 2x - 2}{x^3}$$

$$f' = 2x + 2 - \frac{2}{x^2} - \frac{2}{x^3}$$

$$f'' = 2 + \frac{4}{x^3} + \frac{6}{x^4}$$

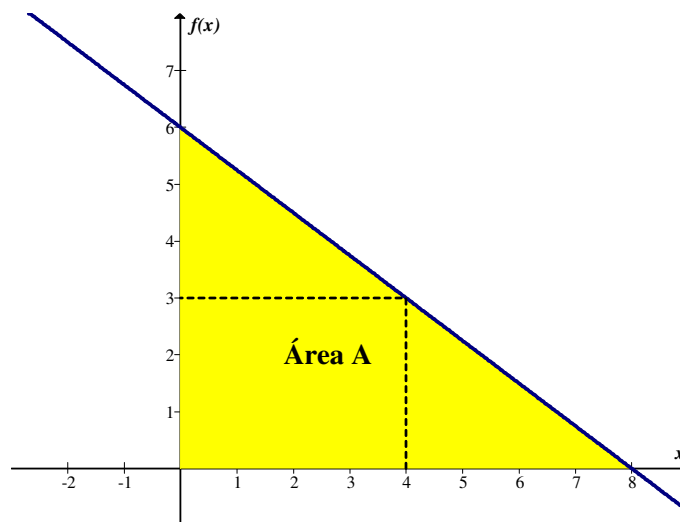
$$f''(1) > 0 \Rightarrow x = 1 \text{ é ponto de mínimo.}$$

Portanto temos:

$$d = \sqrt{4+4} = \sqrt{8} \text{ m.}$$

20. Seja s uma reta que passa pelo ponto $(4,3)$ formando um triângulo com os eixos coordenados positivos. Qual a equação de s para que a área desse triângulo seja mínima?

A Figura que segue ilustra o problema



A equação da reta é dada por:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - 3 = m(x - 4)$$

$$x = 0 \Rightarrow y - 3 = m \cdot 0 - 4m \quad \therefore y = -4m + 3$$

$$y = 0 \Rightarrow -3 = mx - 4m \quad \therefore x = \frac{4m - 3}{m}$$

$A = \frac{1}{2} \left(\frac{4m-3}{m} \cdot (-4m+3) \right)$ é a função para minimizar.

$$A = \frac{-(4m-3)^2}{2m}$$

$$A' = \frac{2m(-2)(4m-3) + (4m-3)^2 \cdot 2}{4m^2}$$

$$A' = \frac{-16m(4m-3) + 2(4m-3)^2}{4m^2}$$

$$A = 0 \Rightarrow -16m(4m-3) + 2(4m-3)^2 = 0$$

$$-8m(4m-3) + (4m-3)^2 = 0$$

$$-32m^2 + 24m + 16m^2 - 24m + 9 = 0$$

$$-16m^2 + 9 = 0$$

$$16m^2 = 9$$

$$m^2 = \frac{9}{16} \quad \therefore \quad m = \pm \sqrt{\frac{9}{16}} = \pm \frac{3}{4}$$

$m = \frac{3}{4}$ não interessa.

$$A' = \frac{-8m(4m-3) + (4m-3)^2}{2m^2} = \frac{-16m^2 + 9}{2m^2} = -8 + \frac{9}{2m^2}$$

$$A'' = -\frac{9}{m^3}$$

$$A''|_{-3/4} > 0 \Rightarrow \frac{-3}{4} \text{ é ponto de mínimo.}$$

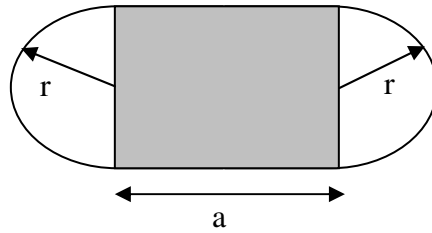
Portanto $m = -\frac{3}{4}$

A equação procurada é dada por:

$$y - 3 = -\frac{3}{4}(x - 4)$$

$$3x + 4y - 24 = 0.$$

21 . Uma pista de atletismo com comprimento total de 400 m, consiste de 2 semicírculos e dois segmentos retos, conforme figura a seguir. Determinar as dimensões da pista, de tal forma que a área retangular, demarcada na figura, seja máxima.



Temos:

$$P = 2\pi r + 2a = 400$$

$$a = 200 - \pi r$$

$$A = a \cdot 2r$$

$$A = (200 - \pi r) 2r$$

$$A = 400r - 2\pi r^2$$

$$A' = 400 - 4\pi r$$

$$A' = 0 \Rightarrow 400 - 4\pi r = 0$$

$$4\pi r = 400$$

$$\pi r = 100$$

$$r = \frac{100}{\pi}$$

$$A'' = -4\pi$$

$$A'' \Big|_{\frac{100}{\pi}} < 0 \Rightarrow r = \frac{100}{\pi} \text{ é ponto de máximo.}$$

$$\text{Portanto, } r = \frac{100}{\pi} m.$$

$$a = 200 - \pi \frac{100}{\pi} = 100 m.$$

22. Um cilindro circular reto está inscrito num cone circular reto de altura $H = 6 m$ e raio da base $R = 3,5 m$. Determinar a altura e o raio da base do cilindro de volume máximo.

Supondo x o raio da base do cilindro e y a sua altura, temos:

$$\frac{y}{r-x} = \frac{H}{R} \quad \therefore \quad y = \frac{H(R-x)}{R} = \frac{6(3,5-x)}{3,5}$$

$$V = \pi x^2 y$$

$$V = \frac{\pi R H x^2 - \pi H x^3}{R}$$

$$V' = \frac{2\pi R H x - 3\pi H x^2}{R}$$

$$V' = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{2R}{3} = \frac{2 \cdot 3,5}{3} = \frac{7}{3} m$$

Já foi mostrado no exercício 12 que é máximo.

$$\text{Portanto: } x = \frac{7}{3} m$$

$$y = 2m$$

23. Uma fábrica produz x milhares de unidades mensais de um determinado artigo. Se o custo de produção é dado por $C = 2x^3 + 6x^2 + 18x + 60$, e o valor obtido na venda é dado por $R = 60x - 12x^2$, determinar o número ótimo de unidades mensais que maximiza o lucro $L = R - C$.

Temos:

$$L = 60x - 12x^2 - 2x^3 - 6x^2 - 18x - 60$$

$$L = -2x^3 - 18x^2 + 42x - 60$$

$$L' = -6x^2 - 36x + 42$$

$$L' = 0 \quad \Rightarrow \quad -6x^2 - 36x + 42 = 0$$

$$x^2 + 6x - 7 = 0$$

$$x_1 = 1 \quad \text{e} \quad x_2 = -7$$

$$L'' = -12x - 36$$

$$L''(1) = -12 - 36 < 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 1 \text{ é ponto de máximo.}$$

Resposta: $x = 1000$ unidades.

24. Um cilindro reto é inscrito numa esfera de raio R . Determinar esse cilindro, de forma que seu volume seja máximo.

Vamos considerar o cilindro com raio da base igual a x e altura igual a $2y$.

Vale a relação:

$$x^2 + y^2 = R^2 \Rightarrow x^2 = R^2 - y^2$$

Temos:

$$V = \pi x^2 \cdot 2y$$

$$V = \pi (R^2 - y^2) 2y$$

$$V = 2\pi (R^2 y - y^3)$$

$$V' = 2\pi (R^2 - 3y^2)$$

$$V' = 0 \Rightarrow 2\pi (R^2 - 3y^2) = 0$$

$$R^2 - 3y^2 = 0$$

$$y^2 = \frac{R^2}{3} \quad \therefore \quad y = \pm \frac{R}{\sqrt{3}}$$

$$V'' = 2\pi (-6y)$$

$$V'' \Big|_{\frac{R}{\sqrt{3}}} < 0 \Rightarrow y = \frac{R}{\sqrt{3}} \text{ é ponto de máximo.}$$

$$\text{Portanto: } y = \frac{R}{\sqrt{3}}, \text{ altura} = \frac{2R}{\sqrt{3}} \text{ e raio} = \sqrt{\frac{2}{3}} R.$$

25. Um fazendeiro deve cercar dois pastos retangulares, de dimensões a e b , com um lado comum a . Se cada pasto deve medir 400m^2 de área, determinar as dimensões a e b , de forma que o comprimento da cerca seja mínimo?

Temos:

$$A_1 = 400\text{m}^2$$

$$a \cdot b = 400$$

$$A_2 = 400\text{m}^2$$

$$b = \frac{400}{a}$$

$$P = 4b + 3a$$

$$P = 4 \frac{400}{a} + 3a = \frac{1600 + 3a^2}{a}$$

$$P' = \frac{a \cdot 6a - (1600 + 3a^2)}{a^2}$$

$$= \frac{6a^2 - 1600 - 3a^2}{a^2} = \frac{3a^2 - 1600}{a^2}$$

$$P' = 0 \Rightarrow 3a^2 - 1600 = 0$$

$$3a^2 = 1600$$

$$a^2 = \frac{1600}{3} \quad \therefore a = \frac{40\sqrt{3}}{3}$$

$$P'' = \frac{a^2 \cdot 6a - (3a^2 - 1600) \cdot 2a}{a^4} = \frac{6a^2 - 6a^2 + 3200}{a^3} = \frac{3200}{a^3}$$

$$P'' \Big|_{\frac{40\sqrt{3}}{3}} > 0 \Rightarrow a = \frac{40\sqrt{3}}{3} \text{ é ponto de mínimo.}$$

Portanto, temos:

$$a = \frac{40\sqrt{3}}{3} \text{ e } b = 10\sqrt{3}.$$

26. Um fabricante, ao comprar caixas de embalagens, retangulares, exige que o comprimento de cada caixa seja 2 m e o volume 3 m³. Para gastar a menor quantidade de material possível na fabricação de caixas, quais devem ser suas dimensões.

Considerando-se as dimensões da caixa como 2 m. × x m. × y m temos:

$$V = 2xy = 3$$

$$y = \frac{3}{2x}$$

$$A = (4 + 2x)y + 4x$$

$$A = (4 + 2x) \cdot \frac{3}{2x} + 4x$$

$$A = \frac{12 + 6x + 8x^2}{2x}$$

$$A' = \frac{2x(6+16x) - (12+6x+8x^2) \cdot 2}{4x^2}$$

$$A' = 0 \Rightarrow 12x + 32x^2 - 24 - 12x - 16x^2 = 0$$

$$16x^2 - 24 = 0$$

$$16x^2 = 24$$

$$x^2 = \frac{24}{16} = \frac{12}{8} = \frac{3}{2} \quad \therefore \quad x = \sqrt{\frac{3}{2}}$$

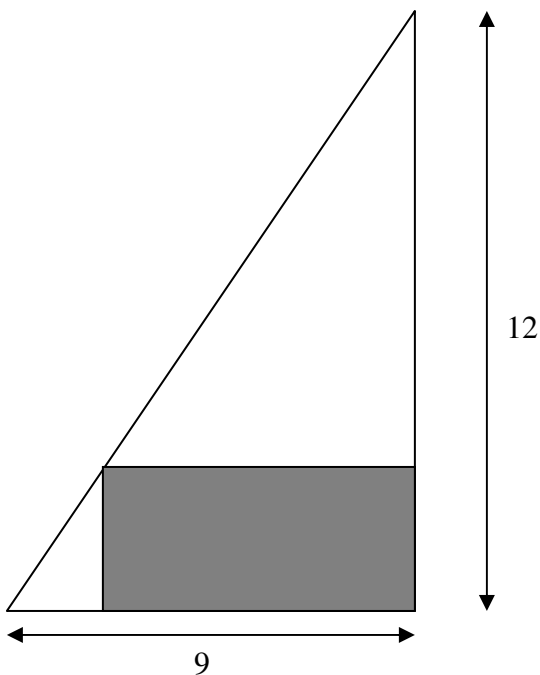
$$A' = \frac{16x^2 - 24}{4x^2} = 4 - \frac{6}{x^2}$$

$$A'' = \frac{12}{x^3}$$

$$A'' \Big|_{\sqrt{\frac{3}{2}}} > 0 \Rightarrow x = \sqrt{\frac{3}{2}} \text{ é ponto de mínimo.}$$

$$\text{Dimensões: } 2m \times \frac{\sqrt{6}}{2}m \times \frac{\sqrt{6}}{2}m.$$

27. Um retângulo é inscrito num triângulo retângulo de catetos medindo 9 cm e 12 cm. Encontrar as dimensões do retângulo com maior área, supondo que sua posição é dada na figura a seguir.



Considerando-se x e y as dimensões do retângulo, temos:

$$9^2 + 12^2 = 225 \Rightarrow \text{hipotenusa do } \Delta \text{ é } 15.$$

$$\frac{x}{9} = \frac{12-y}{12} \quad \therefore \quad x = \frac{9(12-y)}{12} = \frac{3(12-y)}{4}$$

$$A = xy = \frac{3(12-y)}{4} \cdot y = \frac{36y - 3y^2}{4}$$

$$A' = \frac{36 - 6y}{4}$$

$$A' = 0 \Rightarrow 36 - 6y = 0$$

$$6y = 36 \quad \therefore \quad y = 6$$

$$A'' = -\frac{6}{4}$$

$$A''|_6 < 0 \quad \therefore \quad y = 6 \text{ é ponto de máximo.}$$

$$x = \frac{3(12-6)}{4} = \frac{3 \cdot 6}{4} = 4,5$$

Assim, temos que as dimensões do retângulo são: $4,5\text{cm} \times 6\text{cm}$.